Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
22.05.2020

TUTORIUM ZUR ANALYSIS II

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Ausdrücke für $x \to 0$:

(a) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right)$ (b) $\frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}$

(c) $\frac{1}{x^5}\left(\tan(x) - x - \frac{x^3}{6}\right)$ (d) $\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))}$

Lösung Aufgabe 7

(a) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}.
\end{aligned}$$

Da sowohl

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos(x) = 0$$

als auch

$$\lim_{x\to 0} x\sin(x) = 0$$

verwenden wir die Regel von l'Hospital und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)}.$$

Da für $x \to 0$ erneut Zähler und Nenner dieses Ausdrucks gegen Null konvergieren verwenden wir erneut die Regel von l'Hospital, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen den Grenzwet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}.$$

Da sowohl der Zähler $\tan(x) - x$ als auch $\sin(x) - x$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergieren, verwenden wir die Regel von l'Hospital und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2(x) - 1}{\cos(x) - 1} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2(x)}{\cos(x) - 1}. \end{aligned}$$

Erneut konvergieren sowohl Zähler als auch Nenner dieses Ausdrucks gegen 0 für $x \to 0$, so dass wir nochmals die Regel von l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\tan(x)(1 + \tan^2(x))}{-\sin(x)}.$$

Da für $x \to 0$ immer noch sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0 konvergieren, verwenden wir noch einmal die Regel von l'Hospital und erhalten somit

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} &= \lim_{x \to 0} -\frac{2(1 + \tan^2(x))^2 + 2\tan(x) 2\tan(x)(1 + \tan^2(x))}{\cos(x)} \\ &= -2. \end{aligned}$$

(c) Wir führen eine Taylorentwicklung der Tangensfunktion durch. Dafür benötigen wir die Ableitung dieser Funktion:

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2(x) \\ \tan''(x) &= 2(\tan(x) + \tan^3(x)) \\ \tan^{(3)}(x) &= 2(1 + 4\tan^2(x) + 3\tan^4(x)) \\ \tan^{(4)}(x) &= 2(8\tan(x) + 12\tan^3(x))\tan^2(x)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \tan(0) &= 0 \\ \tan'(0) &= 1 \\ \tan''(0) &= 0 \\ \tan^{(3)}(0) &= 2 \\ \tan^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

und für die Taylorentwicklung ergibt sich somit

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}\tan^{(5)}(\eta)x^5$$

für ein η zwischen 0 und x. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(\tan(x)-x-\frac{x^3}{6}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5!}\tan^{(5)}(\eta)x^5-x-\frac{x^3}{6}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{5!}\tan^{(5)}(\eta)\right)\\
&\to \infty
\end{aligned}$$

und der Grenzwert existiert nicht.

(d) Indem wir den Tangens umschreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x(1-\cos(x))} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x(1-\cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(x)}{x(1-\cos(x))\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x(1-\cos(x))\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{1+x^2}-x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos^2(x)+1-2\cos(x))$

Lösung Aufgabe 8

(a) Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\sin(x)\ln(x)}.$$

Da die Exponentialfunktion, die Sinusfunktion und der Logarithmus stetige Funktion sind und außerdem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x)\ln(x) = 0$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)} &= \exp\left(-\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x)\ln(x)\right)\\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten den Grenzwet

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}.$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to 0$ gegen 0 konvergieren, verwenden wir die Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1)+x}.\end{aligned}$$

Da wiederrum Zähler als auch Nenner für $x \to 0$ gegen 0 konvergieren, verwende erneut l'Hospital und erhalte

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}+1}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Beachte zunächst, dass wir mit Hilfe der binomischen Formel

$$(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x) = 1+x^2-x^2 = 1$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist

$$\sqrt{1+x^2}-x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Damit ergibt sich der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}.$$

Da für $x \to \infty$ sowohl Zähler als auch Nenner dieses Ausdrucks divergieren, erhalten wir mit der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(d) Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen erhalten wir

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2},$$

sodass wir den Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\cos^2(x)+1-2\cos(x)) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^4}(\cos(2x)+1+2-4\cos(x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^4}(\cos(2x)+3-4\cos(x))
\end{aligned}$$

untersuchen. Dazu berechnen wir die Taylorentwicklung der Cosinusfunktion im Punkt 0:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos(0)+\cos'(0)x+\cos''(0)\frac{x^2}{2}+\cos'''(0)\frac{x^3}{6}+\cos^{(4)}(\eta)\frac{x^4}{24} \\
&= 1-\sin(0)x-\cos(0)\frac{x^2}{2}+\sin(0)\frac{x^3}{6}+\cos(\eta)\frac{x^4}{24} \\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\cos(\eta)\frac{x^4}{24}
\end{aligned}$$

für ein $\eta \in [0, x]$. Wir setzen diese Darstellung sowohl für $\cos(x)$ als auch für $\cos(2x)$ in den Grenzwert ein und erhalten damit

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\cos^2(x)+1-2\cos(x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^4}\left(1-\frac{4x^2}{2}+\cos(\eta_1)\frac{16x^4}{24}+3-4\left(1-\frac{x^2}{2}+\cos(\eta_2)\frac{x^4}{24}\right)\right)
\end{aligned}$$

für $\eta_1 \in [0, 2x]$ und $\eta_2 \in [0, x]$. Durch Zusammenfassen ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\cos^2(x)+1-2\cos(x)) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2x^4}\left(\cos(\eta_1)\frac{16x^4}{24}-4\cos(\eta_2)\frac{x^4}{24}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\cos(\eta_1)\frac{16}{24}-\cos(\eta_2)\frac{4}{24}\right).
\end{aligned}$$

Da $\eta_1 \in [0, 2x]$ und $\eta_2 \in [0, x]$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}(\cos^2(x) + 1 - 2\cos(x)) \\
&= \lim_{\eta_1,\eta_2\to 0} \frac{1}{2}\left(\cos(\eta_1)\frac{16}{24} - \cos(\eta_2)\frac{4}{24}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{16}{24} - \frac{4}{24}\right) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9 Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig bzw. gleichmäßig stetig sind:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$ (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x^2)$

(c) $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ (d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\sqrt{1 + x})$

Lösung Aufgabe 9

(a) Behauptung: Die Funktion $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ ist gleichmäßig stetg.
Wir zeigen, dass f Lipschitz-stetig ist. Dann folgt direkt die gleichmäßige Stetigkeit. Zu zeigen ist daher

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$$

für eine Konstante $L > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$. Da wir bereits wissen, dass die Sinusfunktion stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, können wir nach dem Mittelwertsatz jedoch folgern, dass

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(z)|$$

für ein $z \in [x, y]$. Dann ist

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |\cos(z)| \leq 1$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und somit ist f Lipschitz-stetig.

(b) Die Funktion $x \mapsto f(x) = \sin(x^2)$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Behauptung: f is nicht gleichmäßig stetig.

Wir wählen $x_n = \sqrt{2\pi n}$ und $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - y_n)(x_n + y_n)}{x_n + y_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} \\
&= -\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Allerdings gilt für die Funktionswerte

$$f(x_n) - f(y_n) = \sin(2\pi n) - \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist f nicht gleichmäßig stetig.
(c) Die Funktion $x \mapsto f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig auf $(0, 1]$ als Komposition stetiger Funktionen. Behauptung: f ist nicht gleichmäßig stetig. Wir wählen wieder Folgen $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ und $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) &= \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2} - 2\pi n}{(2\pi n)(2\pi n + \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}}{(2\pi n)(2\pi n + \frac{\pi}{2})} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Allerdings folgt wie oben, dass

$$f(x_n) - f(y_n) = -1$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ git. Somit ist f nicht gleichmäßig stetig.
(d) Behauptung: Die Funktion $x \mapsto f(x) = \sin(\sqrt{1 + x})$ ist gleichmäßig stetig. Wir zeigen wie in Teil (a), dass die Funktion Lipschitz-stetig ist und verwenden dazu erneut die Ableitung. Beachte, dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \cos(\sqrt{1 + x})\frac{1}{2\sqrt{1 + x}}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt nun

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(z)|$$

für jedes $x, y > 0$ und ein $z \in [x, y]$. Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} &= \left|\cos(\sqrt{1+z})\frac{1}{2\sqrt{1+z}}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2\sqrt{1+z}}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und somit ist f Lipschitz-stetig.

Aufgabe 10 Zeigen Sie, dass jede stetige periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Lösung Aufgabe 10 Übungsblatt 10, Aufgabe 37.

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die genaue Anzahl der reellen Nullstellen des Polynoms $P(x) = x^5 - 5x + 1$. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung Aufgabe 11
Behauptung: Die Funktion P hat 3 reelle Nullstellen.
Zum Beweis unserer Behauptung, bestimmen wir, auf welchen Intervallen die Funktion monoton fallend/steigend ist. Dafür benötigen wir die Ableitung

$$P'(x) = 5x^4 - 5.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}P'(x) > 0 &\Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (oder } x = \pm i).\end{aligned}$$

Die reellen Nullstellen der Ableitung sind daher 1 und -1. Auf $(-\infty, -1)$ gilt $P'(x) = x^4 - 1 > 0$ und somit ist die Funktion auf diesem Intervall monoton steigend mit

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

und $P(-1) = -1+5+1 = 5$. Da P als Polynom stetig ist, muss nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert zwischen $-\infty$ und 5 angenommen werden und somit muss eine Nullstelle im Intervall $(-\infty, -1)$ liegen. Analog verfahren wir mit den weiteren Intervallen: Zwischen -1 und 1 ist $P'(x) < 0$ und die Funktion P somit monoton fallend. Da $f(-1) = 5$ und

$f(1) = 1 - 5 + 1 = -3$ ist, muss nach dem Zwischenwertsatz somit auch in diesem Intervall genau eine Nullstelle liegen. Im Intervall $(1, \infty)$ liegt schließlich ebenfalls eine Nullstelle, da

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \infty.$$