Tutorium [illegible]

Nachklausur

2. Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit

2.1 Definitionen und Folgenkriterien

Def.: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt

- stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, falls gilt:

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, s.d. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \ \forall \underset{\in X}{x}$ mit $|x - x_0| < \delta$;

- stetig in X, falls f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist,

- gleichmäßig stetig in X, falls gilt

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.d. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \ \forall x, y \in X$ mit $|x - y| < \delta$.

Wesentlich ist, daß bei der glm. Stetigkeit die Größe δ nicht von einem Punkt x_0 abhängen darf. Fixiert man $y := x_0$ in der Def. von glm. Stetigkeit, sieht man

glm. Stetigkeit $\Longrightarrow$ Stetigkeit

Die Umkehrung gilt i. allg. nicht, wie wir gleich an einigen Beispielen sehen werden.

Die ε-δ-Definition von Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit ist ausgesprochen nützlich zu Beweiszwecken. Um jedoch eine konkret vorgelegte Funktion auf (glm.) Stetigkeit zu untersuchen, ist sie oft recht umständlich zu handhaben. Versuchen wir's an einem konkreten

Bsp. 1: Wir wollen zeigen, daß die Funktion

$$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{x}$$

in einem beliebigen Punkt $x_0 \in (0,\infty)$ stetig ist.

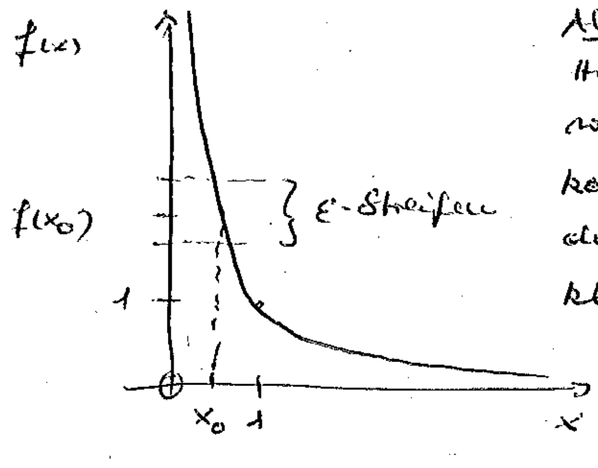
Zu diesem Zweck müssen wir uns ein beliebiges positives ε vorgeben (wie immer bei Stetigkeits- und Konvergenzbeweisen) und die Differenz zweier Funktionswerte durch Wahl von δ kleiner klopfen als dieses ε. Also schätzen wir den Betrag der Differenz $f(x)-f(x_0)$ erstmal ab:

$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x-x_0}{x\,x_0}\right| \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot |x-x_0|$$

Der letzte Faktor ist geeignet, diesen können wir durch die Wahl von δ ja gerade kontrollieren und beliebig klein machen.

Zum Beweis der Stetigkeit im fixierten Punkt $x_0 > 0$ ist auch der zweite Faktor harmlos, diesen können wir ja als Konstante berücksichtigen.

Problematisch ist der erste Faktor, denn unser δ darf zwar von ε und x_0 abhängen, nicht aber von x! Um diesen sinnvoll zu händeln, schauen wir uns den Funktionsgraphen an:



Also: 1. Faktor $\to \infty$ mit $x \to 0$. Hier ist der Problembereich, wo wir die Veränderung von f kaum kontrollieren können, indem wir die Differenz zweier Argumente klein machen.

Ausweg: Durch Wahl von δ erzwingen wir, daß x weit genug von dem problematischen Null entfernt ist, z. B. durch die Forderung

$\delta < \frac{x_0}{2}$ die auf $x > \frac{x_0}{2}$ und damit auf $\frac{1}{x} < \frac{2}{x_0}$ führt.

Ist also $|x - x_0| < \delta < \frac{x_0}{2}$ haben wir also

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{1}{x}\frac{1}{x_0}|x - x_0| < \frac{2}{x_0^2}|x - x_0| < \frac{2\delta}{x_0^2}$$

Zu $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ fehlt uns also nur noch

$$\frac{2\delta}{x_0^2} < \varepsilon, \quad \text{also} \quad \delta < \frac{\varepsilon x_0^2}{2}$$

Durch die Wahl $\delta < \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right)$ können wir also $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ erzwingen. Da $\varepsilon > 0$ und $x_0 > 0$ beliebig waren, haben wir gezeigt:

f ist in jedem Punkt $x_0 \in (0, \infty)$ stetig. □

Unsere Überlegungen legen nahe, daß f „in der Nähe des Nullpunkts" nicht gleichmäßig stetig ist, da unsere Wahl von δ ja stark von x_0 abhängt. Dies werden wir weiter unten exakt beweisen.

Um nicht jede Funktion einzeln auf diese recht mühsame Art mit ε und δ auf Stetigkeit / glm. Stetigkeit untersuchen zu müssen, hat man eine Reihe von Kriterien entwickelt, um diese Prozedur abzukürzen. An erster Stelle sind hier die Folgenkriterien zu nennen, die tatsächlich äquivalente Eigenschaften benennen:

Folgenkriterium für die Stetigkeit in einem Punkt x_0:

Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ ist <u>genau dann</u> stetig in $x_0 \in X$, wenn für alle Folgen $(x_n)_n$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Da der Begriff der Konvergenz von Funktionen mit Hilfe von Folgen definiert wurde ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a :\Leftrightarrow$ (*) $\forall$ Folgen (x_n) in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$), können wir dies auch kürzer schreiben als

$$f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Verbinden wir dieses Kriterium mit den Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen, erhalten wir:

<u>Folgerung 1:</u> Linearkombinationen, Produkte und Quotienten (außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners) stetiger Funktionen sind stetig.

Da $f(x) = x$ stetig ist (wähle $\varepsilon = \delta$!) gilt ferner:

<u>Folgerung 2:</u> Polynome und Rationale Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsbereich.

Ferner gilt:

<u>Folgerung 3:</u> Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig.

(Denn: $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)) = f(g(\lim\limits_{n\to\infty} x_n))$.)

(*) hierbei muß mindestens eine solche Folge existieren

Tutorium ...

Zur Nachklausur

<u>Ferner</u> wurde in der Vorlesung <u>gezeigt</u>: Durch Potenzreihen definierte Fkte. sind in ihrem Konvergenzkreis stetig.

Auch für die glm. Stetigkeit gilt ein äquivalentes Folgenkriterium (ebenfalls in der Vorlesung bewiesen):

Folgenkriterium für glm. Stetigkeit:

Eine Funktion $f: \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ ist genau dann glm stetig in X, wenn für alle Paare von Folgen (x_n) und (y_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$ gilt, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0.$$

Dieses Kriterium ist insbesondere nützlich zum Nachweis, daß eine vorgegebene stetige Funktion nicht glm. stetig ist. Wählen wir z.B. $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{2n}$, so ist $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$, so sehen wir für $f(x) = \frac{1}{x}$ wie im obigen Beispiel, daß

$$f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n \not\to 0.$$

Wie bereits vermutet, ist diese Funktion nicht glm. stetig.

Darüber hinaus gibt es verschiedene hinreichende Kriterien für gleichmäßige Stetigkeit. Hier die wichtigsten:

(1) Jede hölderstetige Funktion (d.h. man hat für ein $\alpha \in (0,1]$ eine Abschätzung $|f(x)-f(y)| \le C|x-y|^\alpha$ $\forall x,y \in X$) ist glm. stetig. ($\alpha = 1$: Lipschitz!)

(2) Stetige Funktionen auf einem Kompaktum (also X kompakt, d.h. beschränkt und abgeschlossen) sind glm. stetig.

(3) Schrankensatz: Ist f d'bar mit beschränkter Ableitung, so ist f Lipschitz-stetig, also insbes. gleichmäßig stetig.

Als Anwendung des Schrankensatzes können wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ etwas detaillierter untersuchen:

Bsp 1. cont.: Wir fixieren eine positive Zahl $\varepsilon_0 > 0$, möglicherweise sehr klein. Dann zeigt das obige Folgenargument:

$$f_1 : (0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad (f_1 = f|_{(0,\varepsilon_0]},\ f \text{ wie oben})$$

ist nicht glm. stetig, denn die Folgen (x_n), (y_n) mit $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{2n}$ befinden sich ja ab irgendeinem N_0 im Intervall $(0,\varepsilon_0]$. Hingegen ist

$$f_2 : [\varepsilon_0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad (f_2 = f|_{[\varepsilon_0,\infty)},\ f \text{ wie oben})$$

sehr wohl stetig, denn im Definitionsbereich, also für $x \geq \varepsilon_0$, ist $|f_2'(x)| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\varepsilon_0^2}$. D.h. f_2' ist beschränkt, nach dem Schrankensatz Lipschitz-stetig, also insbes. glm. stetig.

Ein gleichartiges Beispiel wurde in der Klausur abgefragt:

Bsp 2: $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist stetig als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

$f|_{(0,\varepsilon_0]}$ ist nicht glm. stetig, denn für $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2n}$ haben wir

$$f(x_n) - f(y_n) = \ln\left(\tfrac{1}{n}\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2n}\right) = \ln\left(\tfrac{2n}{n}\right) = \ln(2) \not\to 0$$

Hingegen ist die Einschränkung

$f|_{[\varepsilon_0,\infty)}$ wg $f'(x) = \frac{1}{x}$, so daß $|f'(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$ $\forall x \geq \varepsilon_0$

wieder aufgrund des Schrankensatzes glm. stetig.

Weitere Beispiele finden Sie auf dem Übungsblatt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts über Stetigkeit und glm. Stetigkeit möchte ich noch auf zwei wichtige Sätze über stetige reellwertige Funktionen kurz eingehen:

2.2 Sätze über stetige Funktionen

Zwischenwertsatz: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<f(b)$, so existiert zu jedem $\xi\in(f(a),f(b))$ ein $x\in[a,b)$ mit $f(x)=\xi$.

Bem.: - Nichttrivial, beruht auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Gilt nicht für Funktionen, die auf $\mathbb{Q}\cap[a,b]$ definiert sind, wie das Bsp

$$f:\mathbb{Q}\cap[0,2],\quad x\mapsto x^2$$

zeigt. Wähle etwa $\xi=2$.

- Anwendung: Beweis der Existenz von Nullstellen und Fixpunkten. Etwa: Jedes Polynom ungeraden Grades! $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine Nullstelle (keine Eindeutigkeitsaussage!)

Satz vom Maximum und Minimum: Ist $K\subset\mathbb{C}$ kompakt und $f:K\to\mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K sein Maximum und Minimum an.

Anwendung: Garantiert die Existenz von Extremwerten

Bsp.: $f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\exp(x)$

$f'(x)=\exp(x)>0$, also keine lokalen Extrema.

Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs: Max. und Min. werden auf dem Rand des Def. bereichs angenommen. In der Tat haben wir $1=f(0)\le f(x)\le f(1)=e$ für alle $x\in[0,1]$.