3. Folgen und Reihen

3.1 Folgen und Grenzwerte

Folge = Abbildung mit Def.-Bereich $\mathbb{N}$ (evtl. $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{Z}$) und einer beliebigen Menge M als Zielbereich

In erster Linie betrachtet: $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$, d.h. reelle oder komplexe Zahlenfolgen, Schreibweise: $(a_n)_n$ oder (a_n) oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ebenfalls kennengelernt:
- Folgen von Mengen, z.B. von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \le b_n$, wie etwa bei Intervallschachtelungen, bei denen $I_{n+1} \subset I_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$
- Funktionenfolgen, Bsp. $f_n(x) = x^n$ oder die Partialsummenfolge von Potenzreihen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Grundlegender Begriff: Konvergenz bzw. Divergenz

Def.: Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$, falls gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \ge N$.
In diesem Fall heißt a der Grenzwert der Folge (a_n) und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Eine Folge, die nicht konvergiert, nennen wir divergent.

Bsp.: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

(aus der Vorlesung bekannt)

(b) $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot z^n = 0$ hierbei: $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$
$k = 0$: "geometrische Folge", wichtig!

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

(d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$, wobei
$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(s.u.)}$$

Aus der Kenntnis einiger weniger grundlegender Grenzwerte können wir viele weitere gewinnen mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Tutorien der Nachklausur

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren, und in (c), daß $b_n \neq 0 \; \forall n$ wie auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Die Folgerung umfaßt dann insbesondere die Existenz der Limites auf der linken Seite.

Manche Grenzwerte sind mit Hilfe der 'Rechenregeln' allein nicht zu bestimmen, wie z.B.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$ oder (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (0 < a \leq b)$

wachsende Anzahl von Faktoren

aus der Klausur

Hier ist oft das sog. 'Sandwich'-Theorem hilfreich, sowohl zum Beweis der Konvergenz einer Folge, wie auch zur Berechnung des Grenzwerts.

Sandwich-Theorem / Einschließungssatz: Gegeben seien drei reelle Zahlenfolgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ mit

i) $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$, ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch (c_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Tutorium zum Nachrechnen

Anwendung auf die Beispiele oben:

(a) $$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \underbrace{\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot \ldots \cdot\frac{2}{n-1}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n} \leq \frac{4}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

(b) $$b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil } a \leq b}}{\leq} \sqrt[n]{2b^n} = \sqrt[n]{2}\cdot b \to b \quad (n\to\infty)$$

Also: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = b$, falls $0 < a \leq b$.

Ein schönes Beispiel für die fehlerhafte Anwendung der Rechenregeln für Produkte mit einer wachsenden Anzahl von Faktoren liefert die Exponentialfolge:

! Warnung; falsch !: $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdots\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad (n\to\infty)$$

Zwar konvergiert jeder Faktor gegen 1, aber

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 1.$$

Eng verknüpft mit dem Begriff der Konvergenz ist derjenige der Cauchy-Folge:

Def.: Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ so daß $\forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Schreibweise: $\lim_{n,m \to \infty} |a_n - a_m| = 0$.

Stets gilt: Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

d.h. z.B. auch in $\mathbb{Q}$

Die Umkehrung dieser Aussage für reelle Zahlenfolgen ist gerade die Vollständigkeits-keitseigenschaft der reellen Zahlen, die wir als Axiom eingeführt haben:

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Bem. Dasselbe gilt für komplexe Zahlenfolgen, dies ist jedoch kein Axiom, sondern eine Folgerung aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Hinreichendes Kriterium für Cauchy-Folgen: (a_n) komplexe ZF:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C \cdot q^n \quad \text{für ein } C \in \mathbb{R} \text{ und ein } q \in (0,1)$$

Dann ist (a_n) Cauchy und mithin konvergent.

Bew.

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq C \sum_{k=m}^{n-1} q^k \leq C \cdot \frac{q^m}{1-q} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

ist insbesondere erfüllt, wenn $|a_{n+1} - a_n| \leq q\,|a_n - a_{n-1}|$, $q < 1$ (!), denn durch Iteration haben wir

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q\,|a_n - a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^n |a_1 - a_0|$$

(sogenannte Kontraktionseigenschaft).

Während das hinreichende Kriterium oben für komplexe Zahlenfolgen gilt, ist das folgende Konvergenzkriterium auf Folgen reeller Zahlen beschränkt, weil es nicht nur auf der Vollständigkeit, sondern auch auf der Anordnung von $\mathbb{R}$ beruht.

Konvergenzkriterium für reelle Zahlenfolgen: Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Beide Kriterien sind besonders geeignet zum Nachweis der Konvergenz rekursiv definierter Folgen der Form

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad x_0 = a$$

mit stetigem f. Wenn für eine solche Folge die Konvergenz bereits feststeht, ist die Berechnung des Grenzwerts kein prinzipielles Problem.

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$$

Also ist lediglich die Fixpunktgleichung $x = f(x)$ zu lösen.

Bsp. 1: $\quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n} \qquad x_1 = 1$

Wir nehmen an, daß der Grenzwert existiert, als $x = \lim_{x\to\infty} x_n$.

Dann ist $x = 1 + \frac{1}{1+x} \Rightarrow (1+x)x = (1+x)+1 \Rightarrow x^2 + x = x + 2$

$\Rightarrow x^2 = 2$. Da stets $x_n \geq 0$ (Induktion), ist $x = \sqrt{2}$

Bleibt also zu zeigen: (x_n) ist konvergent.

Wir versuchen es zuerst mit dem Monotoniekrit. Betrachten dazu die ersten Folgenglieder:

$$x_1 = 1 < x,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > x,\quad x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4 < x$$

Also ist die Folge nicht monoton! Nächster Versuch: Wir verwenden das Krit. für Cauchy-Folgen:

$$|x_{n+1}-x_n| = \left|1+\frac{1}{1+x_n} - 1 - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right| = \frac{|x_{n-1}-x_n|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

Wir benötigen: $|x_{n+1}-x_n| \leq q\,|x_n - x_{n-1}|$, also würde uns ausreichen zu zeigen $x_n \geq 1 \ \forall n$, denn dann hätten wir das gewünschte mit $q = \frac{1}{4}$. $x_n \overset{!}{\geq} 1$ ist aber leicht per Induktion zu beweisen. Wir haben $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n} \geq 1$. Fertig.

Besser: Zsf.:
Folgerung: (x_n) ist eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, konvergiert also in $\mathbb{R}$ und der Grenzwert ist $x = \sqrt{2}$.

Bsp. 2 und zugleich Präsenzaufgabe:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+x_n} \qquad x_1 = 2$$

Zeigen Sie, daß (x_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert! Beide o.g. Kriterien können hier angewendet werden.

Lös.: • Zuerst stellen wir fest, daß $x_n \geq 1$ ist. Dies ist für $n=1$ vorausgesetzt, und wenn $x_n \geq 1$ ist, folgt

$\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{1}{2}$ und $x_{n+1} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq 1$.

• Wir betrachten die Differenz

$$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{1+x_n} - \left(2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_n}$$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_n)}$$

Tutorium zur Nachklausur

• **Variante 1: Cauchy-Folgen-Argument:** Da $x_n \geq 1$ ist haben wir $\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n$!) und damit

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}| \frac{1}{(1+x_{n-1})(1+x_n)} \leq \frac{1}{4} |x_n - x_{n-1}|$$

Das ist wieder die Kontraktionseigenschaft mit $q = \frac{1}{4}$.
Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge und daher konvergent

• **Variante 2: Monotonie-Argument:**

Wir haben $\quad x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1}) \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x_{n-1})(1+x_n)}}_{>0}$

Also gilt $\quad \underset{(\geq)}{x_n - x_{n-1} < 0} \Longrightarrow \underset{(\geq)}{x_{n+1} - x_n < 0}$

und damit ist (x_n) monoton. Wg. $x_1 = 2$ und $x_2 = 2 - \frac{1}{1+2} < x_1$ ist (x_n) monoton fallend.
Da $x_n \geq 1$ (s.o.) folgt die Konvergenz.

• **Berechnung des Grenzwerts:** $x = 2 - \frac{1}{1+x}$

$$\Rightarrow x^2 + x = 2 + 2x - 1 = 2x + 1 \Longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Da $x_n \geq 1 \ \forall n$, kann nur $x_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ der Grenzwert sein.

3.2 Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge (a_n) komplexer Zahlen.

Def.: Die endlichen Summen $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißen Partialsummen der Folge (a_n). Die daraus gebildete Folge (S_n) wird als Partialsummenfolge bezeichnet.

Def.: Wenn die Folge (S_n) konvergiert, nennen wir ihren Grenzwert eine unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Ebenfalls wird das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als formaler Ausdruck synonym für die Partialsummenfolge (S_n) verwendet, etwa in Formulierungen wie

"Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert."

Das ist verwirrend, weil zwei verschiedene Objekte – einmal die Folge (S_n) und zum anderen im Konvergenzfall ihr Grenzwert – mit demselben Symbol bezeichnet werden. Aber es ist der gängige Sprachgebrauch und zudem suggestiv.

Termine zur Nachklausur

1. Verallgemeinertes Leibniz-Kriterium:

Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen und $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Dies Kriterium ist nützlich für die Untersuchung von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises (siehe unten). Wir können damit aber auch z. B. die folgende Frage beantworten:

Bsp. 3: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \quad ?$$

Lös.: Wir haben $e^{inx} = (e^{ix})^n$ und für $x \in \mathbb{R}$ ist $|e^{ix}| = 1$. Ferner ist $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Ist nun $x \in \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, so gilt $e^{ix} = 1$ und die Reihe ist die harmonische Reihe, d. h. die Reihe divergiert. Andernfalls, also für $x \notin \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, ist $e^{ix} \neq 1$ und die Reihe konvergiert nach dem verallgemeinerten Leibniz-Kriterium. Die Antwort lautet also:

Diese Reihe konvergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ und divergiert für $x \in \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

(Pause)

Alle anderen Konvergenzkriterien für Reihen, die wir in der Vorlesung kennengelernt haben, sind verknüpft mit dem Begriff der absoluten Konvergenz:

__Def.:__ Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

__Bem.__ Absolute Konvergenz ist eine echt stärkere Eigenschaft als Konvergenz, z. B. konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(= \ln(2))$ aufgrund des Leibniz-Kriteriums, sie konvergiert aber nicht absolut, da die harmonische Reihe divergiert.

2. Majorantenkriterium: Ist $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Bsp.: i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha \geq 2$, da $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ mit der obigen Teleskopreihe als Majorante.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergiert für $\alpha \leq 1$, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$.

Wählt man die geometrische Reihe als Majorante, kann man mit Hilfe des Majorantenkriteriums die folgenden beiden Kriterien für absolute Konvergenz beweisen:

FR9

Nur wenige Reihen lassen sich explizit berechnen:

1. Die geometrische Reihe: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

gilt $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} z^k \underset{1)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$\underset{2)}{=} \frac{1}{1-z}$$

1) geometrische Summenformel, gilt für $z \neq 1$, sogar in jedem beliebigen Körper

2) Gilt nur für $|z| < 1$.

Tutorium bis

Nach Klausur bis

2. Gelingt eine Darstellung $a_n = b_n - b_{n+1}$ mit einer konvergenten Folge b_n, so sprechen wir von einer Teleskopreihe. Hierfür gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{k+1}$$

$$= b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Bsp. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

3. Eine wichtige divergente Reihe ist die harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Häufig ist bereits die Frage schwierig zu entscheiden, ob eine Reihe überhaupt konvergiert. Daher hat man eine Vielzahl von Konvergenzkriterien für Reihen entwickelt:

0. Notwendiges Kriterium: (a_n) Nullfolge? sollte man immer zuerst testen!

3. Quotientenkriterium: $a_n \neq 0$ für fast alle n und

$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

4. Wurzelkriterium: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

Es gibt entsprechende Divergenzkriterien. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für fast alle n und $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ implizieren z.B., daß (a_n) keine Nullfolge ist und somit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium sind besonders scharfe Kriterien. Man kann mit ihrer Hilfe zum Bsp. nicht entscheiden, für welche $\alpha \in (1,2)$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

konvergiert. Wir haben $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \longrightarrow 1$ bzw.

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^\alpha \longrightarrow 1$ und beide Kriterien erlauben keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz. Dies ist nicht verwunderlich, da beide auf der Majorisierung durch eine geometrische Reihe beruhen, und diese konvergiert sehr schnell.

Es gibt aber eine Klasse von Reihen, für die Quotienten- und Wurzelkriterium hervorragend funktionieren, und das sind die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Die charakteristische Größe für Potenzreihen ist der Konvergenzradius

$$R := \sup\{r > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\}$$

Es gilt in diesem Zusammenhang

- $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konv.
- $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergent
- für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ ist eine genauere Untersuchung des Konvergenzverhaltens notwendig, z.B. mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums.

Quotienten- und Wurzelkriterium liefern konkrete Berechnungsformeln für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Aus dem Wurzelkriterium erhält man: $R = \frac{1}{L}$, wobei

$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard).

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums zeigt man

$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls dieser lim existiert (Euler-Formel)

Konvention in diesem Zsh.: $R = \infty$: $P(z)$ konvergiert absolut für alle z, ist genau dann der Fall, wenn $L = 0$ für L wie in der Formel von Cauchy-Hadamard. – $R = 0$: $P(z)$ konvergiert nur für $z = 0$.

Bsp 4: Es sei $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} z^{2n+1}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert bzw. divergiert $P(z)$? In welchen Fällen liegt absolute Konvergenz vor?

Tutorium zur Nachklausur

1. $\tilde{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \cdot z^{2n}$, so daß $P(z) = z \cdot \tilde{P}(z)$

Offenbar haben P und $\tilde{P}$ dasselbe Konvergenzverhalten.

2. $w = z^2$, so daß $Q(w) = \tilde{P}(z)$ für $Q(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} w^n$

3. Q hat jetzt die Standardform, so daß die Berechnungsformeln angewendet werden können. Die Formel von Cauchy-Hadamard ergibt z.B.

$$L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

also $R = 2$ für die Potenzreihe Q, das bedeutet:

Q konvergiert absolut für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 2$

Q divergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 2$

4. Wg. $|z|^2 = |z^2| = |w|$ ist $|w| \gtreqless 2 \Leftrightarrow |z| \gtreqless \sqrt{2}$. Also gilt für $\tilde{P}$ und damit für P:

Absolute Konvergenz $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$

Divergenz $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \sqrt{2}$

5. Untersuchung für den Rand des Konvergenzkreises: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \sqrt{2}$. Dann ist

$$P(z) = z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z^2}{2}\right)^n, \text{ wobei } \left|\frac{z^2}{2}\right| = 1$$

Wenn $\frac{z^2}{2} = 1$ ist, also $z = \pm\sqrt{2}$ gilt, ist

$$P(z) = \pm\sqrt{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \pm\infty, \ P(z) \text{ divergiert also.}$$

ist hingegen $|z|=\sqrt{2}$, aber $z \notin \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ so konvergiert $P(z)$, aber die Konvergenz ist nicht absolut.

Erg.: absolute Konvergenz für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$,

Konvergenz, aber nicht absolute Konvergenz für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ mit $|z| = \sqrt{2}$,

Divergenz für $z \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{2}\}$

Präsenzaufgabe: Dieselbe Fragestellung für $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n^2 (27)^n}$!

Lös: Abs Konvergenz für $|z| \leq 3$, Divergenz für $|z| > 3$.

Abschließende Bemerkungen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$.

Beweis mit dem Verdichtungssatz oder dem Integralvergleichskrit.

(ii) Umordnung von Reihen: Empfehlung, die einfachen Argumente dazu nochmal anzuschauen.