Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020, 11. Tutorium am 03.07.20

Hallo zusammen,

gegeben sei ein Punkt $P = (x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ auf der Diagonalen des Koordinatenkreuzes mit $x_0 > 1$. Gesucht ist der Abstand von P zu dem Hyperbelast

$$H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\,, xy = 1\}.$$

Hier möchte ich drei Möglichkeiten diskutieren, dieses Problem zu lösen. Welche fallen Ihnen ein?

Formulierung der Extremwertaufgabe

Gesucht ist das Infimum der Abstandsfunktion

$$d((x,y),(x_0,x_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-x_0)^2}$$

auf der Menge H_+, wobei $P = (x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ ein fester Punkt, x_0 in den nachfolgenden Rechnungen also ein Parameter (und keine Variable) ist. Da $d((x,y),(x_0,x_0))$ für $(x,y) \to \infty$ über alle Grenzen wächst und die Abstandsfunktion stetig ist, handelt es sich bei dem Infimum tatsächlich um ein Minimum. Es geht also um das (globale) Minimum der Funktion

$$F(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-x_0)^2}$$

unter der Nebenbedingung $xy = 1$. Da die Wurzel streng monoton steigt, kann man von F zur Funktion

$$f(x,y) := \frac{1}{2}((x-x_0)^2 + (y-x_0)^2)$$

übergehen, was die Rechnungen vereinfacht.

Lösungsweg 1: Einsetzen, Anwendung der Methoden aus Analysis I

Die Nebenbedingung $xy = 1$ läßt sich elementar nach $y = \frac{1}{x}$ auflösen, was man in die sogenannte "Zielfunktion" f einsetzen kann. Das führt zu der Aufgabe der Minimierung der Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$g(x) = f(x, \frac{1}{x}) = \frac{1}{2}((x - x_0)^2 + (\frac{1}{x} - x_0)^2)$$

definiert wird. Versuchen Sie's. Auf welche Schwierigkeit werden Sie geführt? Können Sie bestimmte Lösungen der notwendigen Bedingung für lokale Extrema erraten, möglicherweise durch die Problemstellung geleitet? -

Die hier auftretende Schwierigkeit wird umgangen bei den folgenden beiden Lösungswegen.

2. Methode: Lagrange-Multiplikator

Nach dem Satz über Extrema mit Nebenbedingungen aus der Vorlesung lautet die notwendige Bedingung hier

$$\nabla(f - \lambda\varphi)(x, y) = (0, 0),$$

wobei die Nebenbedingung in der Form $\varphi(x, y) := xy - 1 = 0$ gegeben ist. Sie werden auf ein nichtlineares Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen (eine davon die Nebenbedingung selbst) für die drei Unbekannten x, y und λ geführt. Die Kenntnis von λ ist in der Regel verzichtbar. (Diese 2. Variante ist sozusagen der "Pflichtteil" im heutigen Tutorium, da die Lagrange-Multiplikatoren auf dem "Lehrplan" stehen. Es ist aber tatsächlich eine gute Vorbereitung auf das Übungsblatt 11.)

3. Lösungsweg: Generalisierte Koordinaten

Dabei handelt es sich um ein wenig scharf umrissenes Verfahren, was ich in der Physik gelernt habe. Es besteht darin, die Nebenbedingung dadurch in die Rechnung einzubauen, dass man die zulässige Kurve oder Fläche, auf der sich die Variablen bewegen dürfen, zu parametrisieren, d. h. darzustellen als Bild eine stetig differenzierbaren, injektiven Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega' \to \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \psi(t).$$

Im vorliegenden Fall erklären wir das mit einer vorbereitenden

Übungsaufgabe: Zeigen Sie, dass $H_+ = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$, wobei

$$x(t) = \cosh(t) + \sinh(t) = e^t \quad \text{und} \quad y(t) = \cosh(t) - \sinh(t) = e^{-t}.$$

Anschließend sollten Sie überlegen, wie man diese Darstellung von H_+ zur Lösung der gestellten Extremwertaufgabe verwenden kann.

Gutes Gelingen!