Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020, 7. Tutorium am 05.06.20

Hallo zusammen,

das Thema “Totale Differenzierbarkeit” soll heute der Gegenstand des Tutoriums sein. In der ersten Aufgabe geht es darum, die Definition dieses Begriffs zur Kenntnis zu nehmen und damit eine einfache “Produktregel” zu zeigen. Im zweiten Teil sollen Sie sich mit der Kettenregel vertraut zu machen und mit ihrer Hilfe die Jacobi-Matrix einer zusammengesetzten Funktion berechnen.

Ergänzungen auf den Seiten 6 und 9.

Aufgabe 1

Es seinen $f, g : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ total differenzierbar.
Zeigen Sie, dass auch

$$fg : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto fg(x) := f(x)g(x)$$

in x_0 total differenzierbar ist und bestimmen Sie $\nabla(fg)(x_0)$!

Teillösung zu Aufgabe 1

Wir wissen, dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \varphi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{|h|} = 0$$

und

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + \nabla g(x_0)h + \psi(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{|h|} = 0.$$

Hieraus folgt

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = \big(f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\varphi(h)\big)\big(g(x_0)+\nabla g(x_0)h+\psi(h)\big)$$

$$= f(x_0)g(x_0)+\big(f(x_0)\nabla g(x_0)+g(x_0)\nabla f(x_0)\big)h+r_1(h)+r_2(h)+r_3(h)$$

Teillösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)

mit $r_1(h) = (\nabla f(x_0)h)(\nabla g(x_0)h)$, $r_2(h) = ..$ usw.. Nun kann man

$\nabla(fg)$ ablesen und hat dann noch zu zeigen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_i(h)}{|h|} = 0 \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, 3\} \qquad (!)$$

Vollständige Lösung zu Aufgabe 1

Wie erwartet erhält man die Produktregel

$$\nabla(fg)(x_0) = \nabla f(x_0)g(x_0) + \nabla g(x_0)f(x_0).$$

Zu den Abschätzungen der Restterme für $h \to 0$: Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\left|\frac{r_1(h)}{|h|}\right| = \left|\frac{(\nabla f(x_0)h)(\nabla g(x_0)h)}{|h|}\right| \leq |\nabla f(x_0)||\nabla g(x_0)||h| \to 0.$$

Ferner, für $r_2(h) = \varphi(h)(g(x_0) + \nabla g(x_0)h + \psi(h))$,

$$\left|\frac{r_2(h)}{|h|}\right| \leq \left|\frac{\varphi(h)}{|h|}\right| |g(x_0) + \nabla g(x_0)h + \psi(h)|,$$

was man für hinreichend kleines $|h|$ wiederum abschätzen kann durch

$$\leq \left|\frac{\varphi(h)}{|h|}\right| (|g(x_0) + |\nabla g(x_0)| + 1) \to 0.$$

Ähnlich für $r_3(h) = \psi(h)(f(x_0) + \nabla f(x_0)h)$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, y = (y_1, y_2)^\top \mapsto f(y) := (y_1^2 - y_2^2, 2y_1y_2)^\top$$

und

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2)^\top \mapsto g(x) = (x_1 \cos(x_2), x_1 \sin(x_2))^\top.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $Df(y)$, $Dg(x)$ und $D(f \circ g)(x)$, letztere zum einen mit der Kettenregel und zum anderen, indem Sie die zusammengesetzte Funktion $f \circ g(x)$ explizit bestimmen und dann die Jacobi-Matrix ausrechnen. (Wenn beide Wege zum selben Ergebnis führen, haben Sie vermutlich richtig gerechnet.)

Teillösung zu Aufgabe 2

Für $f(y) = (f_1(y), f_2(y))^\top = (y_1^2 - y_2^2, 2y_1y_2)^\top$ erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$Df(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

und entsprechend für g

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_2) & -x_1 \sin(x_2) \\ \sin(x_2) & x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Zur Anwendung der Kettenregel muss man jetzt noch $g(x)$ für y einsetzen und das Matrizenprodukt $Df(g(x))Dg(x)$ ausrechnen. Die Additionstheoreme für sin und cos erlauben eine gewisse Vereinfachung. Letzteres gilt auch, wenn Sie $f(g(x))$ bestimmen.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Anwendung der Kettenregel (also nach dem vorhergehenden nur noch: die Matrixmultiplikation) ergibt unter Verwendung der Additionstheoreme

$$D(f \circ g)(x) = 2x_1 \begin{pmatrix} \cos(2x_2) & -x_1 \sin(2x_2) \\ \sin(2x_2) & x_1 \cos(2x_2) \end{pmatrix}.$$

Andererseits hat man (nochmal: Additionstheoreme!)

$$f(g(x)) = x_1^2 \begin{pmatrix} \cos(2x_2) \\ \sin(2x_2) \end{pmatrix}.$$

Berechnet man hiervon in der üblichen Weise die partiellen Ableitungen und sortiert diese zur Jacobi-Matrix, so gelangt man zum selben Ergebnis.