Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020, 6. Tutorium am 29.05.20

Hallo zusammen,

heute möchte ich mich mit Ihnen zusammen mit dem Begriff der Kompaktheit beschäftigen, der Gegenstand des Abschnitts 1.5 der Vorlesung ist, den wir in der 8. Sitzung am 19.05. behandelt haben und der in den Übungsaufgaben 22 und 23 vertieft wird. Auch wenn man die topologische Variante der Überdeckungskompaktheit (erwähnt auf der letzten Seite des Skripts und am Ende der slides) außer Acht läßt, bereitet der Kompaktheitsbegriff gewisse Schwierigkeiten, und der/die AnfängerIn ist häufig versucht, mit "Abgeschlossenheit" und "Beschränktheit" zu argumentieren, was im allgemeinen Fall nicht ausreichend ist. Rufen wir uns zunächst die Definition noch einmal in Erinnerung:

Ergänzungen auf den Seiten 8, 10 und 12.

Erinnerung: Definition der Kompaktheit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *kompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) heißt kompakt, wenn der metrische Teilraum (K, d) kompakt ist.

Bewiesen haben wir, dass jede kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) abgeschlossen und beschränkt ist. Im $\mathbb{K}^n$ gilt dies aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstraß mit Äquivalenz, aber in allgemeinen metrischen Rümen ist Kompaktheit eine echt stärkere Eigenschaft. Also muss man zum Nachweis der Kompaktheit stets die Existenz einer konvergenten Teilfolge einer beliebigen Folge in dem betrachteten metrischen Raum (X, d) bzw. in einer Teilmenge davon zeigen. Beginnen wir mit der Diskussion einiger der "Richtig oder falsch?" - Fragen aus der Vorlesung:

Richtig oder falsch?

(Aus der Vorlesung vom 19.05.20)

(2) Sind K_1 und K_2 kompakt, so ist auch $K_1 \cup K_2$ kompakt.

Das ist in der Tat richtig, wie Sie sicherlich auch vermutet haben. Aber wie ist diese einfache Aussage zu beweisen?

Dazu sei $(x_n)_n$ eine Folge in $K_1 \cup K_2$. Dann liegen unendlich viele Folgenglieder in K_1 oder es liegen unendlich viele Folgenglieder in K_2. Ohne Einschränkung können wir das erste annehmen, also dass eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ in K_1 existiert. Weil K_1 kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ dieser Teilfolge, die gegen ein $x \in K_1$ konvergiert. Damit sind wir aber auch schon fertig, denn es ist auch $x \in K_1 \cup K_2$ und also haben wir eine Teilfolge $(x_{n_{k_l}})_l$ der Folge $(x_n)_n$ gefunden, die in $K_1 \cup K_2$ konvergiert (gegen das $x \in K_1 \cup K_2$ nämlich, was wir oben gefunden haben).

Richtig oder falsch? - Nächste Frage:

(3) Sind K_1 und K_2 kompakt, so ist auch $K_1 \cap K_2$ kompakt.

Auch das ist richtig. Der Beweis ist nicht schwieriger als der gerade zu (2) geführte (es gibt mehrere Möglichkeiten zu argumentieren). Eines dieser Argumente liefert gleich eine etwas allgemeinere Aussage, nach deren Richtigkeit unter (4) gefragt wurde:

Richtig oder falsch? - Frage (4)

(4) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cap K$ kompakt.

Auch diese Aussage ist richtig, und weil jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes abgeschlossen ist, wird damit auch die Richtigkeit von (3) gezeigt. Wie wird's bewiesen?

Richtig oder falsch? - Frage (4)

(4) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cap K$ kompakt.

Auch diese Aussage ist richtig, und weil jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes abgeschlossen ist, wird damit auch die Richtigkeit von (3) gezeigt. Wie wird's bewiesen?

Sie sollten sich noch ein wenig Zeit zum Überlegen nehmen.

Richtig oder falsch? - Frage (4)

(4) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cap K$ kompakt.

Auch diese Aussage ist richtig, und weil jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes abgeschlossen ist, wird damit auch die Richtigkeit von (3) gezeigt. Wie wird's bewiesen?

Der Einstieg in den Beweis ist folgender: Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $K \cap A$. Dann liegt die ganze Folge also insbesondere im Kompaktum K und besitzt also eine in K konvergente Teilfolge. D. h. es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ und ein $x \in K$, so dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ in (X, d) (hier kann man auch schreiben: in (K, d)). Was ist jetzt noch zu zeigen? Dies herauszufinden, und der Beweis dieser verbleibenden Teilaussage, sei nun als Aufgabe 1 gestellt.

Lösung von Aufgabe 1

Zu zeigen ist noch, dass $x \in A$ (und damit in $K \cap A$) liegt. Dies folgt aber aus der Abgeschlossenheit von A, denn $(x_n)_n$ ist eine Folge, die ganz in A verläuft, und die (im Grundraum X) konvergiert. Abgeschlossenheit bedeutet gerade, dass dann der Grenzwert x ein Element von A ist.

Richtig oder falsch? - Frage (5)

Und schließlich ist auch die Aussage (5) aus der Vorlesung richtig.
Aufgabe 2: Zeigen Sie

(5) Ist K kompakt und A abgeschlossen, so ist auch $A \cup K$ abgeschlossen.

Hinweis: Auch hier ist es am einfachsten, eine naheliegende Verallgemeinerung der Behauptung zu formulieren und zu beweisen.

Lösung von Aufgabe 2

Wir zeigen, dass die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. (Da jede kompakte Menge abgeschlossen ist, folgt daraus insbesondere die Aussage (5).)

Sind A_1 und A_2 abgeschlossen, so sind A_1^c und A_2^c offen. Da der Durchschnitt zweier (oder auch endlich vieler) offener Mengen offen ist, ist auch $A_1^c \cap A_2^c$ offen. Hieraus folgt, dass $(A_1^c \cap A_2^c)^c = A_1 \cup A_2$ abgeschlossen ist. (Im letzten Schritt wurde eine der de Morganschen Regeln sowie $(A^c)^c = A$ benutzt.)

Aufgabe 3:

Wenden wir uns der zweiten der in den slides formulierten "weiterführenden Fragen" zu: Die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ in

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_2 < \infty\}$$

ist tatsächlich abgeschlossen, denn es gilt $B = f^{-1}([0,1])$ für die stetige Abbildung

$$f : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \|x\|_2\,,$$

und wir wissen, dass $[0,1]$ abgeschlossen ist und dass die Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen sind. Bleibt als Aufgabe: Zeigen Sie, dass B *nicht* kompakt ist.

Lösung der Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n := (\delta_{nk})_k$, also diejenige Folge, die an der n-ten Stelle eine 1 und sonst lauter Nullen hat. Dann ist $\|e_n\|_2 = 1$ und somit $(e_n)_n$ eine Folge in B. Für $n \neq m$ ist aber $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$. Zwei nichtidentische Folgenglieder haben also einen positiven Mindestabstand, was die Existenz einer konvergenten Teilfolge ausschließt. Daher ist B nicht kompakt.