Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020, 1. Tutorium am 24.04.20

Hallo zusammen,

im heutigen Tutorium möchte ich mit Ihnen eine etwas umfangreichere Aufgabe zur Integrationstechnik bearbeiten, und zwar, die unbestimmten Integrale

$$I_N(x) := \int \frac{dx}{\cosh(x)^N}$$

zu berechnen, wobei $N \in \mathbb{N}$ ist. Das gibt uns die Gelegenheit, gleich beide grundlegenden Integrationsregeln - Substitutionsregel und Regel der partiellen Integration - anzuwenden. (Sie sollten sich dazu ggf. den Abschnitt 6.4 der Vorlesung Analysis I bereitlegen.) Zugleich können wir einen Blick auf die uneigentlichen Integrale

$$I_N := \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh(x)^N}$$

werfen.

Ergänzungen auf den Seiten 4,5 und 7.

Aufgabenstellung

So wie diese Integrale dastehen, sehen wir erstmal nix, vielleicht ist uns der cosh nicht einmal so vertraut, dass wir über die Existenz der uneigentlichen Integrale I_N entscheiden können. Also: Erst einmal die Definition des cosh (eventuell nachschauen und) einsetzen, und dann kann es losgehen, das einfachste zuerst:

Aufgabenstellung

So wie diese Integrale dastehen, sehen wir erstmal nix, vielleicht ist uns der cosh nicht einmal so vertraut, dass wir über die Existenz der uneigentlichen Integrale I_N entscheiden können. Also: Erst einmal die Definition des cosh (eventuell nachschauen und) einsetzen, und dann kann es losgehen, das einfachste zuerst:

(1) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums (Satz 1 in Abschnitt 6.5), dass die uneigentlichen Integrale I_N existieren.

Aufgabenstellung

So wie diese Integrale dastehen, sehen wir erstmal nix, vielleicht ist uns der cosh nicht einmal so vertraut, dass wir über die Existenz der uneigentlichen Integrale I_N entscheiden können. Also: Erst einmal die Definition des cosh (eventuell nachschauen und) einsetzen, und dann kann es losgehen, das einfachste zuerst:

(1) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums (Satz 1 in Abschnitt 6.5), dass die uneigentlichen Integrale I_N existieren.

(2) Bringen Sie den Integranden auf die Gestalt

$$\frac{1}{\cosh(x)^N} = -f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

mit $\varphi(x) = e^{-x}$, und wenden Sie die Substitutionsregel an.

Aufgabenstellung

So wie diese Integrale dastehen, sehen wir erstmal nix, vielleicht ist uns der cosh nicht einmal so vertraut, dass wir über die Existenz der uneigentlichen Integrale I_N entscheiden können. Also: Erst einmal die Definition des cosh (eventuell nachschauen und) einsetzen, und dann kann es losgehen, das einfachste zuerst:

(1) Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums (Satz 1 in Abschnitt 6.5), dass die uneigentlichen Integrale I_N existieren.

(2) Bringen Sie den Integranden auf die Gestalt

$$\frac{1}{\cosh(x)^N} = -f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

mit $\varphi(x) = e^{-x}$, und wenden Sie die Substitutionsregel an.

(3) Jetzt können Sie $I_N(x)$ und dann auch I_N für $N \in \{1, 2\}$ berechnen. Die Stammfunktion von $-f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ist ja bekannt, für $\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$ verwende man die Substitutionsregel.

Lösung der Aufgabe 1

Wie wir bei der Diskussion zur Γ - Funktion gesehen haben, ist

$$\int_0^R e^{-x} dx = 1 - e^{-R} \to 1 \qquad (R \to \infty),$$

das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x} dx$ existiert also. Nun ist

$$0 \leq \frac{1}{\cosh(x)^N} \leq \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq 2e^{-x},$$

so dass nach dem Majorantenkriterium die uneigentlichen Integrale I_N existieren.

Einstieg zu den Aufgaben (2) und (3)

Zunächst schreiben wir

$$\frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1 + (e^{-x})^2}$$

und erhalten damit

$$\frac{1}{\cosh(x)^N} = -2^N \frac{-e^{-x}(e^{-x})^{N-1}}{(1 + (e^{-x})^2)^N}.$$

Jetzt können Sie die in Aufgabe (2) noch gesuchte Funktion f ablesen. Nun substituiert man $t = \varphi(x) = e^{-x}$, wobei $\varphi'(x) = -e^{-x}$ ist.

Für $N = 2$ bzw. allgemeiner für gerades N führt eine zweite Substitution, nämlich $y = t^2$ mit $y'(t) = 2t$ weiter.

Weiterführende Aufgabenstellung

Für diejenigen, bei denen das bisherige ganz wunderbar fix geklappt hat, hier schonmal ein weiterführender Hinweis:

(1) Für gerades N lässt sich das Argument für $N = 2$ leicht verallgemeinern: In dem Term

$$\frac{t^{N-2}}{(1+t^2)^N}$$

schreibe man $N = 2L + 2$, damit $t^{N-2} = (1 + t^2 - 1)^L$ und multipliziere mit dem Binomischen Lehrsatz aus. Anschließend kann man wie im Fall $N = 2$ die Substitutionsregel verwenden. Berechnen Sie eine allgemeine Formel für $I_N(x)$. Was ergibt sich speziell für $N = 4$?

Weiterführende Aufgabenstellung

(2) Der Fall N ungerade ist etwas schwieriger bzw. unübersichtlicher, weil man die bisherigen Argumente noch mit einer partiellen Integration verbinden muss. Wir beschränken uns hier auf den Fall $N = 3$, bei dem das wesentliche schon klar wird.

Nach der Substitution $t = e^{-x}$ ist die Aufgabe im wesentlichen zurückgeführt auf die Berechnung des Integrals

$$J_3(t) = \int \frac{t^2}{(1+t^2)^3} dt = \frac{1}{2} \int t g'(t) dt$$

mit $g(t) = -\frac{1}{2}(1+t^2)^{-2}$. Jetzt partiell integrieren. Für das verbleibende Integral verwende man $1 = (1+t^2) - t^2$.