Aufgabe 1. ***Kettenregel, Jacobi-Matrix,Inverse Abbildungen und Banachscher Fixpunktsatz***

a) Formulieren Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher genau!

b) Berechnen Sie jeweils $Df(x,y), Dg(u)$ bzw. $Dg(u,v)$ und $D(g\circ f)(x,y)$ für alle $u,v,x,y\in\mathbb{R}$, wobei

1. $f(x,y)=e^{xy}cos(y)$ *und* $g(u)=\binom{u+1}{sin(u)}$ *für* $u,x,y\in\mathbb{R}$.
2. $f(x,y)=\binom{x^2-y^2}{2xy}$ *und* $g(u,v)=\binom{u^3-3uv^2}{3u^2v-v^3}$ *für* $u,v,x,y\in\mathbb{R}$.

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix},\qquad Dg(u,v)=\begin{pmatrix}3u^2-3v^2 & -6uv\\ 6uv & 3u^2-3v^2\end{pmatrix}.$$

$$D(g\circ f)(x,y)=Dg(f(x,y)).Df(x,y)=\begin{pmatrix}3(x^2-y^2)^2-3(2xy)^2 & -6(x^2-y^2)(2xy)\\ 6(x^2-y^2)(2xy) & 3(x^2-y^2)^2-3(2xy)^2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6x^5-60x^3y^2+30xy^4 & -6y^5+60x^2y^3-30x^4y\\ +6y^5-60x^2y^3+30x^4y & 6x^5-60x^3y^2+30xy^4\end{pmatrix}.$$

c) Gegeben sei die folgenden Funktionen:

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad f(x,y):=\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\ -y^2+3yx^2\end{pmatrix}.$$
$$g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad g(x,y):=\begin{pmatrix}e^{xy}x^2\\ -3ye^{-xy}\end{pmatrix}.$$
$$h:(0,\infty)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2\backslash\{0\},\quad h(x,y):=\begin{pmatrix}x^2\cos(y)\\ x^2\sin(y)\end{pmatrix}.$$

1. *Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f,g und h.*

$$Dg(x,y)=\begin{pmatrix}(2x+yx^2)e^{xy} & x^3e^{xy}\\ 3y^2e^{-xy} & (-3+3xy)e^{-xy}\end{pmatrix}$$

2. *Begründen Sie, dass f lokal invertierbar und konform auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist.*
3. *Sei $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $0<xy<2\}$. Ist g in jedem $(x,y)\in A$ lokal invertierbar?*
Lösung: *Die Menge A ist offen, da mit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=xy$ gilt, dass $A=f^{-1}(0,2)$. Also ist A nach dem Satz (4) in der Seite M32 offen. Darüber hinaus ist g eine stetige differenzierbare Funktion, da g_1,g_2 steitg differenzierbar sind. Wir zeigen nun, dass $\det Dg(x,y)\neq 0$ ist.*
$\det Dg(x,y)=(2x+yx^2)e^{xy}*(-3+3xy)e^{-xy}-x^3e^{xy}*3y^2e^{-xy}=3x^2y-6x=x(3xy-6)$. *Sie ist genau gleich Null, falls entweder $x=0$ oder $3xy=6\ \Leftrightarrow\ xy=2$ ist. Aber die beiden Fälle sind ausgeschlossen nach der Voraussetzung $0<xy<2$. Somit folgt nach dem Satz über inverse Abbildungen in der Seite D55, dass g in jedem $(x,y)\in A$ lokal invertierbar ist.*
4. *Untersuchen Sie, ob h injektiv, surjektiv bzw. überall lokal invertierbar ist.*
5. *Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f^{-1} im Punkt $f(0,1)=\binom{0}{-1}$ und von g^{-1} im Punkt $g(1,1)=\binom{e}{-\frac{3}{e}}$.*

$$Dg^{-1}(g(x,y))=(Dg(x,y))^{-1}=\begin{pmatrix}3e & e\\ \frac{3}{e} & 0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -e\\ \frac{-3}{e} & 3e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{e}{3}\\ \frac{1}{e} & -e\end{pmatrix}.$$

d) i) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz genau!

ii) Untersuchen Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem $x_1=\dfrac{e^{0,5\sin(x_2)}}{\sqrt{e}},\qquad x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+4}$ *eine eindeutige Lösung $(x_1^*,x_2^*)\in\mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung, und beweisen Sie diese.*

***Lösung**: Wir Definieren:*

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ \textit{mit}\ F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}F_1(x_2)\\ F_2(x_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{e}}e^{\frac{1}{2}\sin(x_2)}\\ \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+4}\end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$(F_1(x_2)-F_1(y_2))=F_1'(\xi)(x_2-y_2),\qquad \textit{mit}\quad |F_1'(\xi)|=|\frac{1}{2\sqrt{e}}\cos(\xi)e^{\frac{1}{2}\sin(\xi)}|\leqslant\frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2}.$$

Also $|F_1(x_2) - F_1(y_2))| \leqslant \frac{1}{2}|x_2 - y_2|$.
Analog erhalten wir:

$$(F_2(x_1) - F_2(y_1)) = F_2'(\rho)(x_1 - y_1), \qquad \textit{mit} \quad |F_2'(\rho)| = |\frac{1}{2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+4}}| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Also $|F_2(x_1) - F_2(y_1))| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - y_1|$.
Insgesamt ist also:

$$\|F(x) - F(y)\|_1 = \|F(x_1, x_2) - F(y_1, y_2)\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\|x - y\|_1.$$

Daraus folgt, dass f *eine Kontraktion des vollständigen metrischen Raum* $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ *in sich ist. Der Banachscher Fixpunktsatz ergibt also die Behauptung.*

Aufgabe 2. *Taylor-Formel und lokale Extrema*

a) *Betrachten Sie die Funktionen*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 - 3z^2 - zx.$$
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = xyz + y^2 + x^3.$$

1. *Bestimmen Sie jeweils den Gradienten und die Hessematrix der Funktionen f,g .*

$$\nabla f(x, y, z) = (-x + 2y - z, -5y + 2x, -6z - x), \qquad \nabla g(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 2y, xy).$$

$$Hessf(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad Hessg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Bestimmen Sie alle lokalen Extremastellen der Funktion f.*

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_{:A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

da $det(A) \neq 0$ *ist. Also ist* $(0, 0, 0)$ *die einzige kritische Stelle.*

$$Hessf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$ *für* $-Hessf(0, 0, 0)$. *Also folgt nach dem Lemma 2 in der Seite D42, dass* $-Hessf(0, 0, 0)$ *positiv definit ist. Also ist* $Hessf(0, 0, 0)$ *negativ definit. D.h. im Punkt* $(0, 0, 0)$ *befindet sich ein lokales Maximum.*

3. *Entscheiden Sie, ob die Funktion g lokale Maxima oder lokale Minima besitzt.*

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow & yz + 3x^2 = 0 \qquad (1) \\ & xz + 2y = 0 \qquad (2) \\ & xy = 0 \qquad (3). \end{aligned}$$

Aus (3) *folgt, dass entweder* $x = 0$ *oder* $y = 0$. *Falls* $x = 0$, *so folgt aus* (2), *dass* $y = 0$. *Also sind die kritischen Stellen gegeben durch die Menge*

$$\{(0, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \quad | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$Hessg(0, 0, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun die Eigenwerte von $Hessg(0, 0, \alpha)$, *indem wir die Nullstellen des charakteristischen Polynomes von* $Hessg(0, 0, \alpha)$ *bestimmen.*

$$\chi_{Hessg(0,0,\alpha)}(\lambda) = \det(Hessg(0, 0, \alpha) - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda(2 - \lambda) - \alpha^2).$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{(1+\alpha^2)}$. *Für* $\alpha \neq 0$ *folgt aus dem Lemma 1 D40, dass* $Hessg(0,0,\alpha)$ *indefinit ist. Für* $\alpha = 0$ *ist* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Also ist es nach dem Lemma 1 D40 keine Aussage möglich. Daher müssen wir ein anderes Argument verwenden.*
Zum Beispiel kann man das Umgebungsargument benutzen: Sei $\epsilon > 0$ *gegeben. Sei* $U = B_\epsilon(0,0,0)$ *der offene Kugel um den Punkt* $(0,0,0)$. *Betrachte nun die Punkte* $a = (\frac{\epsilon}{2}, 0, 0)$ *und* $b = (-\frac{\epsilon}{2}, 0, 0)$. *Offensichtlich ist* $a, b \in B_\epsilon(0,0,0)$ *und es gilt:*
$g(\frac{\epsilon}{2}, 0, 0) = \frac{\epsilon^3}{8} > 0$ *und* $g(-\frac{\epsilon}{2}, 0, 0) = -\frac{\epsilon^3}{8} < 0$. *Deswegen kann im Punkt* $(0,0,0)$ *kein Extremum vorliegen. Die Funktion* g *besitzt also in der Menge*

$$\{(0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^3 \quad |\alpha \in \mathbb{R}\}$$

nur Sattelpunkte.

4. *Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades am Punkt* $(1,0,1)$ *für* f *und am Punkt* $(1,1,1)$ *für* g.

Lesen Sie den Satz 1 in der Seite D30 *bzw. die speziell-fälle in der Seite* D35. *Das Taylor-Polynom m-ten Grades am Punkt* $x_0 = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} d_h^k g(x_0)$. *Also*

$$\begin{aligned} T_{(g,m=2)}(h,(1,1,1)) &= g(1,1,1) + \nabla g(1,1,1).h + \frac{1}{2}\langle h, Hessg(1,1,1)h\rangle \\ &= 3h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 + 4h_1 + 3h_2 + h_3 + 3. \end{aligned}$$