Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2016/2017
13.01.2017
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

41. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y),$$

vgl. Bsp.2 in Abschnitt 2.4 der Vorlesung.

(a) Zu $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ finde man möglichst grosse Umgebungen U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ explizit an.
(b) Dieselbe Aufgabenstellung wie in (a), jedoch mit $(x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Hinweis: Lesen Sie ggf. den Satz 1 in Abschnitt 4.3 der Vorlesung zur Analysis I nach.

42. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?

(b) Finden Sie eine affine Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

43. Für $1 \leq i, k \leq n$ seine reelle Zahlen b_i und c_{ik} gegeben, so dass

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2 < 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) + b_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

genau eine Lösung besitzt.

Bitte wenden!

44. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2y_1^2 + y_2^2 &= -4 \\ (x_1 + x_3)^2 + y_1 - y_2 &= -3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung von $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = (1, \frac{1}{2}, -1; -2, 1)$ nach $y = (y_1, y_2)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $y = y(x)$ in $(1, \frac{1}{2}, -1)$.

Abgabe: Fr., 20.01.2017, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 25.01.2017 und Do., 26.01.2017