

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

**33.** Eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *konform* in  $x \in \Omega$ , wenn es eine Zahl  $\rho(x) > 0$  gibt, so dass für die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  gilt

$$Df(x)^\top Df(x) = \rho(x)^2 E_n,$$

wobei  $E_n$  die  $n \times n$ - Einheitsmatrix ist.  $f$  heißt konform in  $\Omega$ , wenn  $f$  in jedem  $x \in \Omega$  konform ist. Zeigen Sie, dass die Inversion

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitssphäre (vgl. Aufgabe 14 (b)) konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante  $\det Di(x)$ ?

**34.** Es sei  $y : (0, \sqrt{2}) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$ , eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  für

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $y$ , und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung  $F(x, y(x)) = 0$  berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung  $y'(x)$ , *ohne* explizit nach  $y$  aufzulösen!

Bitte wenden!

**35.** Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := y^x$$

berechne man das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt  $(x_0, y_0) = (0, 1)$

- (a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in  $(x_0, y_0)$ ,
- (b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

**36.** Gegeben seien Punkte  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ , die ein Dreieck

$$\Delta := \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 : 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \right\}$$

bilden. In einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  sei die Summe der Abstände zu den  $a_i$  minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen benachbarten Vektoren  $a_i - x$  stets  $\frac{2\pi}{3}$  beträgt.

**Abgabe:** Fr., 23.12.2016, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 11.01.2017 und Do., 12.01.2017