

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

29. Für $n \geq 3$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$$

sowie $\Delta f(x) := \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ und bestimme denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische Funktionen* bezeichnet.)

30. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definiert man die *Rotation* von F durch

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist F zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

(b) Ist $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = (0, 0, 0).$$

Kann es eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ geben, so dass

$$\operatorname{grad} \phi(x) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2) \quad ?$$

Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld F mit $\operatorname{rot} F = x$?

Bitte wenden!

31. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2z^3 - 3yz$$

im Punkt $(1,2,1)$ in die Richtungen $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$.

32. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy}; & xy \neq 0 \\ 0; & xy = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

- (a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,
- (b) die Formel $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0)\xi$ für f nur in Ausnahmefällen zutrifft,
- (c) f im Nullpunkt unstetig ist.

Abgabe: Fr., 16.12.2016, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 21.12.2016 und Do., 22.12.2016