

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

**21.** Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) & y_1(0) &= 1, \\y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) & y_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

**22.** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $2\pi$ -periodisch, so dass für  $x \in [-\pi, \pi]$  gilt  $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ .

(a) Berechnen Sie für  $k \in \mathbb{Z}$  die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(b) Verifizieren Sie die Darstellung

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

**23.** Ausgehend vom Ergebnis in Teil (b) der Aufgabe 22

(a) berechne man die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$$

Bitte wenden!

(b) leite für  $0 \leq x \leq \pi$  durch gliedweise Integration (weshalb ist dies zulässig?) die Darstellungen

$$\frac{x}{2}(\pi - x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{x^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4} \quad \text{her und}$$

(c) berechne die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

**24.** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch und stetig. Für die Fourierkoeffizienten  $\widehat{f}(k)$  von  $f$  gelte  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k \widehat{f}(k)| < \infty$ . Zeigen Sie, dass  $f$  stetig differenzierbar ist und dass gilt

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

**Abgabe:** Fr., 02.12.2016, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 07.12.2016 und Do., 08.12.2016