Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
08.07.2020
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

45. Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der nachstehenden inhomogenen linearen Differenzialgleichungen:

(a) $y' + y - \cosh(x) = 0$;

(b) $y' - \frac{x}{1-x^2}y + \frac{1}{1-x^2} = 0 \qquad (|x| < 1)$.

(a) Die Lösung der homogenen Gleichung $y' + y = 0$ ist gegeben durch

$$y_h(x) = C \cdot e^{-x} = C \cdot \varphi(x), \qquad C \in \mathbb{R}. \qquad 0,5P.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen wir durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \varphi(x) \cdot \int \frac{b(x)}{\varphi(x)} dx = e^{-x} \int \cosh(x) e^x dx \\ &= e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1) dx = \frac{1}{4} e^x + \frac{x}{2} e^{-x}. \qquad 1P. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich jetzt durch Addition

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{1}{4} e^x + (\frac{x}{2} + C) e^{-x}. \qquad 0,5P.$$

(b) Die Vorgehensweise ist dieselbe wie in Teil (a).

$$y_h(x) = C \exp \int \frac{x}{1-x^2} dx = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \quad (= C \cdot \varphi(x)) \qquad 0,5P.$$

$$y_p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int \frac{(-\sqrt{1-x^2})}{1-x^2} dx = -\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 0,5P.$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x^2}(C - \arcsin(x)) \qquad 0,5P.$$

46. Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y : [0, \infty) \to (0, \infty)$, für die der Mittelwert auf jedem Intervall $[0, x]$ mit $\sqrt{y(x)}$ übereinstimmt.

Die angegebene Bedingung bedeutet

$$\frac{1}{x}\int_0^x y(t)dt = \sqrt{y(x)}, \qquad \text{also} \qquad \int_0^x y(t)dt = x\sqrt{y(x)},$$

woraus durch Ableiten folgt

$$y(x) = \sqrt{y(x)} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} \cdot y'(x),$$

also die Bernoullische Dgl.

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{x}y(x) \qquad 1P.$$

Hierbei ist $p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x}$, und $\alpha = \frac{3}{2}$. Die zugehörige inhomogene lineare Dgl. für $z = y^{1-\alpha} = y^{-\frac{1}{2}}$ lautet nach Lemma 1 der Vorlesung

$$z' = (1-\alpha)(pz) + q = -\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x}z + \frac{2}{x}\right) = \frac{z}{x} - \frac{1}{x} \qquad 1P.$$

Die konstante Lösung $z_p(x) = 1$ der inhomogenen Gleichung ist leicht zu erraten. 1 P.

Für die homogene Gleichung $z' = \frac{z}{x}$ ergibt Separation die allgemeine Lösung $z_h(x) = cx$, also $z(x) = 1 + cx$ und damit

$$y(x) = \frac{1}{z(x)^2} = \frac{1}{(1-cx)^2} \qquad 1P.$$

Alternative:

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{1}{x} = \frac{z-1}{x}$$

läßt sich direkt separieren:

$$\frac{z'}{z-1} = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln(z-1) = \ln(x) + c_0 = \ln(cx) \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 + cx.$$

47. Gesucht sind ein Lösungsfundamentalsystem von $y' = Py$, wobei

$$P(x) = \frac{1}{1-x^2}\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix},$$

und eine Lösung dieses Systems, die der Anfangsbedingung $y(0) = (a, b)^\top$ genügt. Leiten Sie dazu zunächst ein Differenzialgleichungssystem für $z := (z_1, z_2)^\top := (y_1 + y_2, y_1 - y_2)^\top$ her.

Ausgeschrieben als Gleichungen lautet das vorgelegte System

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{1}{1-x^2}(-xy_1(x) + y_2(x)) \\ y_2'(x) &= \frac{1}{1-x^2}(y_1(x) - xy_2(x)). \end{aligned}$$

Für

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

wie angegeben erhalten wir

$$z_1' = y_1' + y_2' = \frac{1}{1-x^2}(-xy_1 + y_2 + y_1 + xy_2) = \frac{1-x}{1-x^2}(x_1 + y_2) = \frac{z_1}{1+x}$$

und, mit ähnlicher Rechnung

$$z_2' = \frac{z_2}{x-1},$$

also für z das entkoppelte System

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} z_1(x) &= \exp\left(\int \frac{dx}{x+1}\right) = \exp(\ln(x+1)) = x+1 \\ z_2(x) &= \exp\left(\int \frac{dx}{x-1}\right) = \exp(\ln(x-1)) = x-1 \end{aligned}$$

Als Lösungsfundamentalsystem (LFS) für das diagonalisierte System ergibt sich

$$\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x)) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

Nun ist $z = Ay$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Die Inverse hiervon ist $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, und es gilt $y = A^{-1}z$, woraus wir für die ursprüngliche Gleichung ein LFS zu

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+1 & x-1 \\ x+1 & 1-x \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

bestimmen können, was allerdings wegen $\phi(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ noch nicht zur Lösung des AWP taugt. Wir bilden

$$\tilde{\phi}(x) = (\phi_1(x) - \phi_2(x), \phi_1(x) + \phi_2(x)) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

so dass $\tilde{\phi}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und erhalten als Lösung des AWP's $y' = Py$, $y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$y(x) = \tilde{\phi}(x)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bx \\ ax+b \end{pmatrix}. \qquad 1P.$$

48. Für $x > 0$ sei

$$P(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2 & x \\ 0 & \frac{2}{x} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Lösungsfundamentalsystem Φ für das System $y' = Py$, welches der Anfangsbedingung $\Phi(1) = E_3$ genügt. (Hierbei bezeichne E_3 die 3×3-Einheitsmatrix.)

Wir suchen ein Lösungsfundamentalsystem in Dreiecksgestalt, machen also den Ansatz $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$ mit

$$\phi_1(x) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi_2(x) = \begin{pmatrix} \phi_{12}(x) \\ \phi_{22}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi_3(x) = \begin{pmatrix} \phi_{13}(x) \\ \phi_{23}(x) \\ \phi_{33}(x) \end{pmatrix}.$$

Für die Diagonalelemente ergeben sich die homogenen linearen Dgln. 1. Ordnung

$$\phi_{kk}'(x) = \frac{k}{x}\phi_{kk}(x), \qquad k \in \{1, 2, 3\},$$

mit den Lösungen (Raten oder Separation) $\phi_{kk}(x) = c_k x^k$. Da $\phi(1) = E_3$ gefordert ist, wählen wir $c_k = 1$. 1 P.

Da $\phi_{22}(x) = x^2$ nun festgelegt ist, ergibt sich für ϕ_{12} die inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung

$$\phi_{12}'(x) = \frac{1}{x}\phi_{12}(x) + 2x^2$$

der Lösung (Formel für die Lösung der inhom. lin. Dgl.)

$$\phi_{12}(x) = cx + x\int \frac{2t^2}{t}dt = \tilde{c}x + x^3$$

wobei wir für $\phi_{12}(1) = 0$ die Wahl $\tilde{c} = -1$ treffen, also

$$\phi_{12}(x) = x^3 - x \qquad 1P.$$

Ebenso ergibt sich mit $\phi_{33}(x) = x^3$, dass

$$\phi_{23}'(x) = \frac{2}{x}\phi_{23}(x) + x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{23}(x) = cx^2 + x^2\int \frac{t^3}{t^2}dt = \tilde{c}x^2 + \frac{x^4}{2},$$

worin wir $\tilde{c} = -\frac{1}{2}$ wählen, d. h.

$$\phi_{23}(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad (\text{so dass } \phi_{23}(1) = 0). \qquad 1 \text{ P.}$$

Schließlich erhalten wir für ϕ_{13} die Dgl.

$$\begin{aligned}\phi_{13}'(x) &= \frac{1}{x}\phi_{13} + 2\phi_{23}(x) + x\phi_{33}(x)\\ &= \frac{1}{x}\phi_{13}(x) + 2x^4 - x^2\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}\phi_{13}(x) &= cx + x\int \frac{2t^4 - t^2}{t}dt\\ &= \tilde{c}x + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{2},\end{aligned}$$

worin wir $\tilde{c} = 0$ wählen. Insgesamt:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x & x^3 - x & \frac{1}{2}(x^5 - x^3)\\ 0 & x^2 & \frac{1}{2}(x^4 - x^2)\\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix} \qquad 1P.$$