Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
01.07.2020
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

41. Zu bestimmen ist das maximale Volumen eines n-dimensionalen achsenparallelen Quaders, der dem Ellipsoid

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$$

mit den Halbachsen $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, einbeschrieben ist (d.h., dass die Ecken des Quaders auf dem Rand des Ellipsoids liegen).

Lösung. Für einen achsenparallelen Quader

$$Q = \{ y \in \mathbb{R}^n \colon \tilde{x}_i \leq y_i \leq x_i,\ 1 \leq i \leq n \},$$

dessen Ecken auf dem Rand des Ellipsoids liegen, gelten

$$\tilde{x}_i = -x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1;$$

sein Volumen ist daher gegeben durch $f(x) = 2^n \prod_{i=1}^n x_i$, $x_i \geq 0$. Diese Funktion ist zu maximieren unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ für $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1$. (1P.)

Notwendige Bedingung aus dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren: $\nabla(f - \lambda g)(x) = 0$, also

$$2^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = \lambda \frac{2x_i}{a_i^2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(1P.)

Multiplikation mit x_i ergibt

$$2^n \prod_{j=1}^{n} x_j = 2\lambda \frac{x_i^2}{a_i^2}. \qquad (*)$$

Summation über i unter Berücksichtigung der Nebenbedingung führt auf

$$n 2^n \prod_{j=1}^{n} x_j = 2\lambda.$$

(1P.)

Einsetzen in (*) ergibt $\prod_{j=1}^n x_j = n\left(\prod_{j=1}^n x_j\right)\frac{x_i^2}{a_i^2}$. Da wir $x_j = 0$ (woraus $f(x) = 0$ folgen würde) ausschließen können folgt: $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{n}}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Weil f stetig auf einem Kompaktum ist, folgt

$$\max\{f(x)\colon x \in \partial E,\, x_i \geq 0\} = f(\frac{a_1}{\sqrt{n}}, \frac{a_2}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{n}}) = \frac{2^n}{\sqrt{n}^n}\prod_{i=1}^n a_i.$$

(1P.)

42. Es sei $C \subset \mathbb{R}^3$ der Durschschnitt des Kegelmantels

$$M_K = \left\{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\right\}$$

mit der Mantelfläche

$$M_Z = \left\{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1\right\}$$

eines elliptischen Zylinders. Berechnen Sie den Abstand von C zum Nullpunkt.

Lösung. Zu minimieren ist hier die Funktion

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

unter der Nebenbedingungen

$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 = g_2(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1$$

(1P.)

Notwendige Bedingung nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren ist dann

$$\begin{aligned}2x = \nabla f(x) &= \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x)\\ &= 2\lambda_1(x_1, x_2, -x_3) + 2\lambda_2(x_1 + \frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2} + x_2, 0),\end{aligned}$$

in den Komponenten aufgeschrieben

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \frac{\lambda_2}{2}x_2 && \text{(I)}\\ x_2 &= \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 + \frac{\lambda_2}{2}x_1 && \text{(II)}\\ x_3 &= -\lambda_1 x_3 && \text{(III)}\end{aligned}$$

(1P.)

$x_3 = 0$ führt mit $g_1(x) = 0$ auf $x = 0$, was ein Widerspruch zu $g_2(x) = 0$. Also ist $\lambda_1 = -1$, damit (III) erfüllt ist. Damit lauten (I) & (II)

$$\begin{aligned} (2-\lambda_2)x_1 - \frac{\lambda_2}{2}x_2 &= 0 && \text{(I')} \\ -\frac{\lambda_2}{2}x_1 + (2-\lambda_2)x_2 &= 0 && \text{(II')} \end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -\frac{\lambda_2}{2} \\ -\frac{\lambda_2}{2} & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun führt $(x_1, x_2) = (0, 0)$ wieder auf $x = 0$ (wegen $g_1(x) = 0$), ist also wie oben auszuschließen. Lösungen kann es also nur geben, wenn die Determinante der obigen Matrix verschwindet, also wenn

$$(2-\lambda_2)^2 - \frac{\lambda_2^2}{4} = \frac{3}{4}\lambda_2^2 - 4\lambda_2 + 4 = 0, \text{ d.h. wenn}$$

$$\lambda_{2,\pm} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}} = \frac{8}{3} \pm \frac{4}{3} = \begin{cases} 4 \\ \frac{4}{3} \end{cases}$$

(1P.)

Für $\lambda_2 = 4$ ergibt sich $x_1 + x_2 = 0$ woraus wegen $g_2(x) = 0$ folgt, dass $x_1 = \pm 1 = -x_2$, also $x_3^2 = 2$ und damit $f(x) = 4$. Für $\lambda_2 = \frac{4}{3}$ erhalten wir $x_1 - x_2 = 0$ woraus wegen der Nebenbedingung folgt, dass $x_1 = x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, also $x_3^2 = \frac{2}{3}$ sowie $f(x) = \frac{4}{3}$. In diesem zweiten Fall handelt es sich um ein globales Minimum. Es folgt $\operatorname{dist}(0, C) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (1P.)

Bemerkung: Man kann das ganze etwas abkürzen, wenn man die Nebenbedingung $g_1(x) = 0$ in f einsetzt. Dann lautet die Aufgabe, das Minimum von $\tilde{f}(x_1, x_2)$ unter der Nebenbedingung $g_2(x) = 0$ zu finden, was einem dann sofort das 2×2-System bestehend aus (I') und (II') beschert. Führt zum selben Ergebnis und man benötigt nur einen Multiplikator.

43. Bestimmen Sie den Abstand der Hyperbel

$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\right\}$$

zur Geraden

$$G := \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon v = 2u\right\}.$$

Lösung. Zu minimieren ist die Funktion

$$f(x, y, u, v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g_1(x, y, u, v) := x^2 - y^2 - 1 = 0 \text{ und } g_2(x, y, u, v) := 2u - v = 0.$$

(1P.)

Der Satz über die Lagrange-Multiplikatoren liefert als notwendige Bedingung für Extremstellen

$$\nabla f(x,y,u,v) = \lambda \nabla g_1(x,y,u,v) + \mu \nabla g_2(x,y,u,v),$$

also das Gleichungssystem

$$\begin{Bmatrix} 2(x-u) = 2\lambda x \\ 2(y-v) = -2\lambda y \\ 2(u-x) = 2\mu \\ 2(v-y) = -\mu \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x-u = \lambda x = -\mu \\ y-v = -\lambda y = \frac{\mu}{2} \end{Bmatrix}$$

(1P.)

welches zusammen mit den Nebenbedingungen ein System aus 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten x, y, u, v, λ, μ ergibt. Zur Lösung dieses Systems: Die Annahme $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ führt auf $\lambda = 0$ *und* $\mu = 0$ und damit zu $x = u$ und $y = v$, kann also ausgeschlossen werden, da $H \cap G = \emptyset$. Also haben wir

$$-\mu = \lambda x = 2\lambda y, \text{ d.h. } x = 2y,$$

zusammen mit der ersten Nebenbedingung folgt $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ferner:

$$\begin{aligned} x - u (= -\mu) &= 2(v-y) = 4u - x \quad (\text{wegen } v = 2u,\ x = 2y) \\ \Rightarrow 2x = 5u \Rightarrow u &= \frac{2x}{5} = \frac{4}{5\sqrt{3}},\ v = \frac{8}{5\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(1P.) (λ und μ muss man nicht bestimmen!)

Für das Quadrat des Abstands erhalten wir

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = 5(y-v)^2 = 5\left(\frac{8}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

und somit $\operatorname{dist}(H, G) = \sqrt{\frac{3}{5}}$. (1P.)

Z. (Bei dieser Zusatzaufgabe können bis zu 4 Bonuspunkte erreicht werden.) Es seien $\Omega := (0, \infty)^n$, $p > 0$ und

$$P \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto P(x) := \prod_{i=1}^n x_i.$$

Bestimmen Sie das Maximum von P unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$. Folgern Sie aus Ihrem Ergebnis die Ungleichung $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ zwischen dem geometrischen Mittel und dem Potenzmittel zum Exponenten p.

Lösung. Wie so oft bei Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen bedienen wir uns hier der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Die Funktion, deren Extremstelle es zu finden gilt, ist hier P, und die Nebenbedingung fassen wir als $0 = \varphi(x) := \sum_{i=1}^n x_i^p - 1$. Wir erhalten somit als notwendige Bedingung für eine Extremstelle, dass

$$0 = \nabla(P - \lambda\varphi)(x) = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) P(x) - \lambda p \left(x_1^{p-1}, x_2^{p-1}, \ldots, x_n^{p-1}\right).$$

Schreiben wir diese n Gleichungen einzeln auf und multiplizieren jeweils mit x_j so ergibt dies

$$P(x) = \lambda p x_j^p, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

(hierfür oder vorherige Gleichung 1P.)

Jetzt summieren wir diese Gleichungen (über j) und erhalten dann wegen der Nebenbedingung

$$nP(x) = \lambda p \Leftrightarrow P(x) = \frac{\lambda p}{n} = \lambda p x_j^p.$$

Hieran können wir ablesen, dass $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ notwendig ist und damit der maximale Funktionswert

$$\max\{P(x) \colon x \in \Omega,\, \varphi(x) = 0\} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{p}}.$$

(1P.)

Dass es sich bei dem gefundenen Punkt um ein Maximum handelt ist klar, weil das Infimum der Funktion (das aber nicht angenommen wird) Null ist.

Was noch fehlt ist die Folgerung der Ungleichung für die Mittelwerte: Zu $x \in (0, \infty)^n$ sei $\hat{x} = \frac{x}{||x||_p}$, wobei $||x||_p^p = \sum_{i=1}^n x_i^p$ die p-Norm ist. Dann ist nach unserer bisherigen Rechung $P(\hat{x}) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{p}}$, also (1P.)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{||x||_p^n} \prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{p}} \\ \Rightarrow &\prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{1}{n}||x||_p^p\right)^{\frac{n}{p}} \\ \Rightarrow &\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(1P.)

44. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Separation:

(a) $y' = \frac{y}{x}\ln(y), \qquad y(2) = 16,$

(b) $y' = (y - x)^2, \qquad y(0) = 2.$

Hinweis: Substituieren Sie in Teil (b) $z = y - x$.

Lösung.

(a) Zunächst rechnen wir die allgemeine Lösung aus:

$$\begin{aligned} y' = \frac{y}{x}\ln(y) &\Rightarrow \frac{y'}{y\cdot\ln(y)} = \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \ln\ln(y) = \ln(x) + C \\ &\Rightarrow \ln(y) = Cx \Rightarrow y(x) = e^{Cx} \end{aligned}$$

(1P.)

(Von der zweiten in die dritte Zeile dürfen wir springen, weil x und y wegen der Anfangsbedingung positiv sind.) Berücksichtigung der Anfangsbedingung $y(2) = 16 = e^{2C}$ folgt $2C = \ln(16)$ bzw. $C = \ln(4)$, also $y(x) = e^{\ln(4)x} = 4^x$. (1P.)

(b) Wieder zunächst erstmal die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} & y' = (y-x)^2,\ z := y - x \Rightarrow z' = y' - 1 = z^2 - 1 \\ \Rightarrow & \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-1} = x + C_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = x + C_0 \qquad \text{(1P.)} \\ \Rightarrow & \frac{z-1}{z+1} = Ce^{2x} \Rightarrow 1 - \frac{2}{z+1} = Ce^{2x} \\ \Rightarrow & \frac{1-Ce^{2x}}{2} = \frac{1}{z+1} \Rightarrow z + 1 = \frac{2}{1-Ce^{2x}} \\ \Rightarrow & y = z + x = x - 1 + \frac{2}{1-Ce^{2x}} \end{aligned}$$

Zuletzt noch die Anfangsbedingung: $2 = y(0) = -1 + \frac{2}{1-C}$ liefert $1 - C = \frac{2}{3}$, also $C = \frac{1}{3}$. Die Lösung lautet also $y(x) = x - 1 + \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{2x}}$. (1 P.)