Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
24.06.2020
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

37. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y),$$

vgl. Bsp.2 in Abschnitt 2.4 der Vorlesung.

(a) Zu $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ finde man möglichst grosse Umgebungen U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0)$, so dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Geben Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ explizit an.

(b) Dieselbe Aufgabenstellung wie in (a), jedoch mit $(x_0, y_0) = (0, \pi)$.

Hinweis: Lesen Sie ggf. den Satz 1 in Abschnitt 4.3 der Vorlesung zur Analysis I nach.

38. Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?

(b) Finden Sie eine affine Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

39. Für $1 \leq i, k \leq n$ seine reelle Zahlen b_i und c_{ik} gegeben, so dass

$$\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2 < 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) + b_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

genau eine Lösung besitzt.

Bitte wenden!

40. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2y_1^2 + y_2^2 &= -4 \\ (x_1 + x_3)^2 + y_1 - y_2 &= -3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung von $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}; y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) = (1, \frac{1}{2}, -1; -2, 1)$ nach $y = (y_1, y_2)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von $y = y(x)$ in $(1, \frac{1}{2}, -1)$.

Abgabe: elektronisch bis Mi., 01.07., 15.00 Uhr

Aufgabe 37. Bei der Funktion f handelt es sich um die reelle Darstellung der komplexen e-Funktion.
Aus der Vorlesung ist bekannt:
$\det Df(x,y) = \mathrm{e}^{2x} > 0 \Rightarrow f$ ist überall lokal integrierbar (d.h. : zu jedem (x_0, y_0) existieren Umgebungen U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0)$, sodass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist), aber f ist <u>nicht</u> injektiv, da $f(x,y) = f(x, y + 2\pi)$.

(a) $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.
Gesucht: Möglichst große Umgebung U von (x_0, y_0) und V von $f(x_0, y_0) = (0,1)$, so dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist. Hierfür ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ explizit zu bestimmen.
Bezeichnen wir $f(x,y)$ mit (u,v), so ist

$$\frac{u}{v} = \cot(y), \text{ sofern } v \neq 0 \text{ ist.}$$

Die Umkehrfunktion arccot des Cotangens ist definiert mit Werten in $(0,\pi)$, d.h. für $y \in (0,\pi)$ haben wir $y = \operatorname{arccot}(\frac{u}{v})$. Ferner ist $u^2 + v^2 = \mathrm{e}^{2x}$, also $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$. Wir wählen $U = \mathbb{R} \times (0,\pi)$, so dass $(x_0, y_0) \in U$ ist, $V = f(U) = \mathbb{R} \times (0,\infty)$ und haben als Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \times (0,\pi), \quad (u,v) \mapsto f^{-1}(u,v),$$

wobei

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \operatorname{arccot}(\frac{u}{v})\right) = \left(\ln(\sqrt{u^2+v^2}), \operatorname{arccot}(\frac{u}{v})\right).$$

Wertung: 1 Punkt für U und V, 1 Punkt für die Umkehrfunktion.

(b) $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ mit $f(x_0, y_0) = (-1, 0)$.
Jetzt haben wir für $u \neq 0$:

$$\frac{v}{u} = \tan(y)$$

Vorsicht: y_0 liegt nicht im Bild des arctan! Also schreiben wir

$$\frac{u}{v} = \tan(y) = \tan\underbrace{(y-\pi)}_{\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \arctan(\mathbb{R}), \text{ falls } y \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \ni y_0} \Rightarrow y = \pi + \arctan(\frac{v}{u})$$

Also:

$$U = \mathbb{R} \times (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \ni (x_0, y_0),$$
$$V = f(U) = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$$

und

$$f^{-1} : V \to U, \quad (u,v) \mapsto f^{-1}(u,v)$$

mit

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \pi + \arctan(\frac{v}{u})\right).$$

Wertung: 1 Punkt für U und V, 1 Punkt für die Umkehrfunktion.

Aufgabe 38.

(a) Um die lokale Umkehrbarkeit von f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0\}$ zu zeigen betrachten wir zunächst

$$Df(x_1,x_2) = 2\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

mit $\det((Df(x_1,x_2)) = 2(x_1^2+x_2^2) \neq 0$ für alle $(x_1,x_2) \neq (0,0)$. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existieren zu jedem (x_1,x_2) also Umgebungen U von (x_1,x_2) und V von $f(x_1,x_2)$, so dass $f_{|U} : U \to V$ bijektiv ist. (**1 Punkt**)
Da f nicht injektiv ist $(f(-x_1,-x_2) = f(x_1,x_2))$ existiert auch keine globale Umkehrfunktion. (**1 Punkt**)

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(1,-1)+h) &= f^{-1}(f(1,-1)) + Df^{-1}(f(1,-1)) \cdot h + \varphi(h) \\ &\underbrace{=}_{\text{Satz über die Umkehrfunktion}} (-1,1)^T + (Df(1,-1))^{-1} \cdot h + \varphi(h) \end{aligned}$$

mit

$$Df(1,-1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(Df(1,-1))^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

beachte hierbei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)
Also ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(1,-1)+h) &= (1,-1)^T + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \varphi(h) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix} + \varphi(h). \end{aligned}$$

Die affin-lineare Approximation ist dann

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} h_1 - h_2 \\ h_1 + h_2 \end{pmatrix}.$$

(**1 Punkt**)

Aufgabe 39. Setze

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) + b_i, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Hierdurch wird eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert, wobei wir $\mathbb{R}^n$ als mit der euklidischen Norm ausgestatteten vollständig metrischen (Vektor-)raum auffassen. (**1 Punkt**)
Wir haben

$$\begin{aligned} f_i(x) - f_i(y) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) - \sin(c_{ik}y_k) \\ &\underbrace{=}_{\text{MWS}} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot \cos(c_{ik}\xi_k) \cdot (x_k - y_k). \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)
Mit Cauchy-Schwarz ergibt sich

$$(f_i(x) - f_i(y))^2 \leq \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2.$$

Nach Summation über i, erhalten wir dann

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq \underbrace{\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2}_{<1} |x - y|^2.$$

(**1 Punkt**)
Also ist f eine Kontraktion, besitzt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt. Dieser ist die Lösung des gegebenen nichtlinearen Gleichungssystems. (**1 Punkt**)

Aufgabe 40. Sei

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2y_1^2 + y_2^2 + 4 \\ (x_1 + x_3)^2 + y_1 - y_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $F \in C^1(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$, $F(x, y) = 0$ genau dann, wenn (x, y) das gegebene nichtlineare Gleichungssystem löst und

$$F(1, \frac{1}{2}, -1; -2, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix von F ist

$$DF(x, y) = (D_x F(x, y), D_y F(x, y))$$

mit

$$D_y F(x, y) = \begin{pmatrix} -4y_1 & 2y_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Speziell für $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, \frac{1}{2}, -1, -2, 1)$ erhalten wir

$$D_yF(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinanten

$$\det D_yF(x^{(0)}, y^{(0)}) = \det \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -10.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen nachgewiesen. (**2 Punkte**)
Es gibt also Umgebungen $W_{x^{(0)}}$ von $x^{(0)}$ und $W_{y^{(0)}}$ von $y^{(0)}$ und eine Funktion

$$\begin{aligned} &y : W_{x^{(0)}} \to W_{y^{(0)}},\ x \mapsto y(x) \\ &\text{mit } F(x, y(x)) = 0,\ \forall x \in W_{x^{(0)}}. \end{aligned}$$

Für die Jacobimatrix von y erhalten wir nach dem Satz über implizite Funktionen

$$Dy(x) = -(D_yF(x, y(x)))^{-1} \cdot D_xF(x, y(x))$$

$$= -\begin{pmatrix} -4y_1(x) & 2y_2(x) \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \Big|_{(x,y)=(x^{(0)},y^{(0)})} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 & 2x_3 \\ 2(x_1+x_3) & 0 & 2(x_1+x_3) \end{pmatrix} \Big|_{x=x^{(0)}} \quad (\textbf{1 Punkt})$$

$$= -\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (\textbf{1 Punkt})$$

Die Inverse wird wie in Aufgabe 38 berechnet, die Determinante wurde bereits berechnet.