Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
17.06.2020
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

33. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

(a) Beweisen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_0, y_0) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel (*ohne* zusätzliche Grenzwertbetrachtungen), dass in (x_0, y_0) ein isoliertes globales Minimum der Funktion P vorliegt.

Lösung.

(a) Wir berechnen den Gradienten von P

$$\nabla P(x, y) = (x - 4y + 3, -4x + 18y - 14). \qquad \text{1p}$$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum ist also das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix}}_{b},$$

welches wegen $\det A = 18 - 16 = 2 \neq 0$ eindeutig lösbar ist. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{1p}$$

(b) Man berechnet $\operatorname{Hess} P(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix} = A$ (wie oben).

1p

Diese Matrix ist zum einen unabhängig von (x, y) sowie positiv definit, denn $\det A = 2 > 0$ (s.o.) und die Diagonalelemente sind größer Null. Nach der Taylor-Formel gilt fr alle $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

$$P((x_0, y_0) + h) = P(x_0, y_0) + \nabla P(x_0, y_0) \cdot h + \frac{1}{2}\langle h, \operatorname{Hess} P(\xi) \cdot h\rangle$$

mit einem ξ zwischen (x_0, y_0) und $(x_0, y_0) + h$. Speziell haben wir $\nabla P(x_0, y_0) = 0$ und auch $\operatorname{Hess} P(\xi) = A$, also

$$P((x_0, y_0) + h) = P(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\langle h, Ah\rangle > P(x_0, y_0),$$

letzteres da A positiv definit ist. Das wird in Teil (b) behauptet. 1p

34. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und ihren Typ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xy \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

In welchen Fällen handelt es sich um globale Extrema?

Lösung. Notwendige Bedingung für das Auffinden von lokalen Extrema von f ist, dass der Gradient verschwindet. Diesen berechnen wir zunächst:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y(1 - x^2) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x(1 - y^2) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) \\
\Rightarrow \nabla f(x, y) &= (y(1 - x^2), x(1 - y^2)) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2})
\end{aligned}$$

1p

Die Gleichung $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ hat genau 5 Lösungen:

(1) $(x, y) = (0, 0)$ (Hier ist $f(x, y) = 0$ und in jeder Umgebung des Nullpunkts nimmt f sowohl positive als auch negative Funktionswerte an – hier liegt also kein Extremum vor.)
(2) $(x, y) = (1, 1)$
(3) $(x, y) = (1, -1)$
(4) $(x, y) = (-1, 1)$
(5) $(x, y) = (-1, -1)$ 1p

Zur Untersuchung ob bei den 4 letzteren kritischen Stellen Extrema von f zu finden sind berechnen wir die 2. Ableitungen (und damit Hesse-Matrix) von f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= xy(x^3 - 3) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= xy(y^3 - 3) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= (1 - x^2)(1 - y^2) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) \\
\Rightarrow \operatorname{Hess} f(\pm 1, \pm 1) &= \begin{pmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \mp 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

wobei das Minus-Zeichen für $(1,1)$ und $(-1,-1)$ und das Plus-Zeichen für $(1,-1)$ und $(-1,1)$ gilt. 1p

Wir bemerken: $\operatorname{Hess} f(x,y)$ ist negativ definit in $(1,1)$ und $(-1,-1)$, hier liegen isolierte lokale Maxima vor. In $(1,-1)$ und $(-1,1)$ ist $\operatorname{Hess} f(x,y)$ positiv definit, also liegen hier isolierte lokale Minima vor. Wegen $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = 0$ handelt es sich in allen Fällen um globale Extrema. 1p

35. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x,y)$ und zeigen Sie, dass $(0,0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Hess} P(0,0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0,0)$ *kein* lokales Extremum vorliegt.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ die Funktion $\varphi_h : t \mapsto P(th_1, th_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

Lösung.

(a) Der Gradient von P ergibt sich zu

$$\nabla P(x,y) = (12x^3 - 8xy, 2y - 4x^2).$$

Was für die kritischen Stellen bedeutet

$$\begin{aligned}\nabla P(x,y) = 0 &\Leftrightarrow x(3x^2 - 2y) = 0 \wedge y = 2x^2\\ &\Leftrightarrow -x^3 = 0 \wedge y = 2x^2\\ &\Leftrightarrow x = 0 = y.\end{aligned}$$

1p

(b) Für die zweiten partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) &= 36x^2 - 8y && \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(0,0) = 0\\ \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(x,y) &= -8x && \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(0,0) = 0\\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) &= 2 && \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(0,0) = 2\end{aligned}$$

und damit $\operatorname{Hess} P(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Also ist $\operatorname{Hess} P(0,0)$ positiv semidefinit (kann man auch der Diskussion des Falls $n = 2$ in der Vorlesung entnehmen). 1p

Es liegt also *kein* lokales Extremum vor, denn für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $P(x,0) = 3x^4 > 0$ und $P(x, 2x^2) = -x^4 < 0$.

1p

(c) Für $h = (h_1, h_2)^T$ ist $\varphi_h(t) = t^2 h_2^2 - 4t^3 h_2 h_1^2 + 3t^4 h_1^4$.

$\Rightarrow \varphi_h'(t) = t(2h_2^2 - 12th_2h_1^2 + 12t^2h_1^4)$ $\qquad \Rightarrow \varphi_h'(0) = 0$

$\Rightarrow \varphi_h''(t) = 2h_2^2 - 24th_2h_1^2 + 36t^2h_1^4$ $\qquad \Rightarrow \varphi_h''(0) > 0$ falls $h_2 \neq 0$

Andernfalls ist $\varphi_h(t) = 3t^4h_1^4$ mit $h_1 \neq 0$. In beiden Fällen liegt in $t = 0$ eine isolierte lokale Minimalstelle vor.

1p

Sittlicher Nährwert: Bei den Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist die Untersuchung der Schnittfunktionen φ_h im allgemeinen nicht ausreichend!

36. Für $n \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien k_i und α_i positive reelle Zahlen und

$$G : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^n k_i x_i.$$

Zeigen Sie: Ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i > 1$, so besitzt G

(a) *weder* ein globales Extremum,

(b) *noch* ein lokales Extremum.

Hinweis, insbesondere zu Teil (b): Für den Fall $|\alpha| < 1$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass G ein isoliertes globales Maximum besitzt. Teilergebnisse aus dieser Diskussion können Sie zur Lösung der Aufgabe verwenden.

Lösung.

(a) (i) Für $t > 0$ sei $x(t) = (e^{-t}, t, \ldots, t)$. Dann ist

$$G(x(t)) = e^{-\alpha_1 t}(t^{|\alpha|-\alpha_1} - k_1) - t\sum_{i=2}^n k_i \to -\infty \quad (t \to \infty).$$

Also existiert kein globales Minimum. 1p

(ii) Andererseits ist für $x(t) = (t, \ldots, t)$ $(t > 0)$

$$G(x(t)) = t^{|\alpha|} - t\sum_{i=1}^n k_i \to \infty \quad (t \to \infty), \text{ da } |\alpha| > 1.$$

Es gibt also auch kein globales Maximum. 1p

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt (siehe Abschnitt 2.3E):

$$\operatorname{Hess} G(x) = -\underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}_{=:P(x)>0} \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1-\alpha_1^2}{x_1^2} & -\frac{\alpha_1\alpha_2}{x_1x_2} & \cdots & -\frac{\alpha_1\alpha_n}{x_1x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\frac{\alpha_n\alpha_1}{x_nx_1} & \cdots\cdots\cdots & & \frac{\alpha_n-\alpha_n^2}{x_n^2} \end{pmatrix}$$
$$= -P(x) \cdot D(x) \cdot H_0 \cdot D(x)$$

mit einer Diagonalmatrix $D(x) = \operatorname{diag}(\frac{\alpha_1}{x_1}, \frac{\alpha_2}{x_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{x_n})$ und einer von x unabhngigen Matrix

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} - 1 & -1 & \cdots\cdots & -1 \\ -1 & \frac{1}{\alpha_2} - 1 & -1 \ \cdots & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & \cdots\cdots\cdots & -1 & \frac{1}{\alpha_n} - 1 \end{pmatrix}.$$

Da $P(x) > 0$ und alle Diagonalelemente von $D(x)$ positiv sind, gilt also

$$\begin{aligned} & \operatorname{Hess} G(x) \text{ ist positiv (negativ) semidefinit} \\ \Leftrightarrow\ & \langle h, \operatorname{Hess} G(x) \cdot h \rangle \geq 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow\ & -P(x)\langle h, D(x)H_0D(x)h \rangle \geq 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow\ & \langle D(x)h, H_0D(x)h \rangle \leq 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow\ & \langle k, H_0k \rangle \leq 0 \ \ \forall k \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow\ & H_0 \text{ ist negativ (positiv) semidefinit.} \end{aligned}$$

Wobei wir im vorletzten Schritt $k = D(x)h$ gesetzt haben. Nehmen wir jetzt in x_0 ein lokales Maximum (Minimum) an, folgt $\nabla G(x_0) = 0$ und $\operatorname{Hess} G(x_0)$ ist negativ (positiv) semidefinit. Als letztes folgt: H_0 ist positiv (negativ) semidefinit und daher $\operatorname{Hess} G(\xi)$ ist negativ (positiv) semidefinit für alle $\xi \in \mathbb{R}_+^n$. Die Taylor-Formel ergibt jetzt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + h \in \mathbb{R}_+^n$:

$$G(x_0 + h) = G(x_0) + \underbrace{\nabla G(x_0) \cdot h}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle h, \operatorname{Hess} G(\xi) \cdot h \rangle}_{\leq 0\ (\geq 0)}$$

Also ein globales Maximum (bzw. Minimum), im Widerspruch zum Ergebnis von Aufgabenteil (a).

(Hier gibt es 2p, wenn irgend etwas Schlüssiges abgegeben wird.)