Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
17.06.2020
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

33. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}.$$

(a) Beweisen Sie, dass P genau eine kritische Stelle (x_0, y_0) besitzt, und bestimmen Sie diese.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel (*ohne* zusätzliche Grenzwertbetrachtungen), dass in (x_0, y_0) ein isoliertes globales Minimum der Funktion P vorliegt.

34. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und ihren Typ für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xy \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

In welchen Fällen handelt es sich um globale Extrema?

35. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

(a) Berechnen Sie $\nabla P(x, y)$ und zeigen Sie, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Hess}P(0, 0)$ positiv semidefinit ist und dass in $(0, 0)$ *kein* lokales Extremum vorliegt.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ die Funktion $\varphi_h : t \mapsto P(th_1, th_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

Bitte wenden!

36. Für $n \geq 2$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien k_i und α_i positive reelle Zahlen und

$$G : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^n k_i x_i.$$

Zeigen Sie: Ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i > 1$, so besitzt G

(a) *weder* ein globales Extremum,

(b) *noch* ein lokales Extremum.

Hinweis, insbesondere zu Teil (b): Für den Fall $|\alpha| < 1$ wurde in der Vorlesung gezeigt, dass G ein isoliertes globales Maximum besitzt. Teilergebnisse aus dieser Diskussion können Sie zur Lösung der Aufgabe verwenden.

Abgabe: elektronisch bis Mi., 24.06., 15.00 Uhr