Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
10.06.2020
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

29. Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *konform* in $x \in \Omega$, wenn es eine Zahl $\rho(x) > 0$ gibt, so dass für die Jacobi-Matrix $Df(x)$ gilt

$$Df(x)^\top Df(x) = \rho(x)^2 E_n,$$

wobei E_n die $n \times n$- Einheitsmatrix ist. f heißt konform in Ω, wenn f in jedem $x \in \Omega$ konform ist. Zeigen Sie, dass die Inversion

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, \;\; x \mapsto i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitssphäre (vgl. Aufgabe 14 (b)) konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante $\det Di(x)$?

Lösung Aufgabe 29. Wir betrachten die Abbildung $i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$i(x) = \frac{x}{|x|^2} = \frac{1}{|x|^2}(x_1, \dots, x_n)$$

mit den Komponenten $i_j(x) := \frac{1}{|x|^2} x_j$ für $j = 1, \dots, n$. Für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\begin{aligned} a_{k,j} := \frac{\partial}{\partial x_k} i_j(x) &= \frac{\delta_{k,j}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_k}{|x|^4} \\ &= a_{j,k} \end{aligned}$$

(1P)

Dies sind die Einträge der Jacobi-Matrix $Di(x) = (a_{k,j})_{k,j=1,\dots,n}$ und die Jacobi-Matrix ist symmetrisch (also $Di(x)^T = Di(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). (1P) Um zu beweisen, dass i konform ist, benötigen wir das Matrixprodukt $Di(x)^T Di(x)$. Wir bezeichen die Einträge dieser Matrix mit $c_{k,m}$ für $k, m = 1, \ldots, n$. Nach den Rechenregeln für die Matrixmultiplikation ergeben sich diese Einträge als

$$
\begin{aligned}
c_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} a_{j,m} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{k,j}}{|x|^2} - \frac{2x_j x_k}{|x|^4} \right) \left(\frac{\delta_{j,m}}{|x|^2} - \frac{2x_m x_j}{|x|^4} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta_{k,j}\delta_{j,m}}{|x|^4} - \frac{2x_m x_j \delta_{k,j}}{|x|^6} - \frac{2x_j x_k \delta_{j,m}}{|x|^6} + \frac{4x_j^2 x_k x_m}{|x|^8} \right) \\
&= \frac{\delta_{k,m}}{|x|^4} - \frac{2x_k x_m}{|x|^6} - \frac{2x_m x_k}{|x|^6} + \frac{4x_k x_m}{|x|^8} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&= \frac{\delta_{k,m}}{|x|^4} - \frac{2x_k x_m}{|x|^6} - \frac{2x_m x_k}{|x|^6} + \frac{4x_k x_m}{|x|^6} \\
&= \frac{\delta_{k,m}}{|x|^4}.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir $Di(x)^\top Di(x) = \frac{1}{|x|^4} E_n$, wodurch die Konformität von i gezeigt ist. (1P) Für die Determinante folgt damit

$$
\begin{aligned}
|det(Di(x))| &= (det(Di(x))^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= (det(D_i(x)^T Di(x)))^{\frac{1}{2}} \\
&= (det(|x|^{-4} E_n))^{\frac{1}{2}} \\
&= |x|^{-2n}.
\end{aligned}
$$

(1P)

30. Es sei $y : (0, \sqrt{2}) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$, eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ für

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion y, und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $y'(x)$, *ohne* explizit nach y aufzulösen!

Lösung Aufgabe 30. Aus $0 = F(x, y(x)) =: g(x)$ folgt mit der Kettenregel

$$0 = g'(x) = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x).$$

Stellen wir diese Gleichung nach y' um, so erhalten wir

$$y'(x) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)).$$

(1P)

Für $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2)2y + 4y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2(x^2 + y^2)2x - 4x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$$

so dass

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}\frac{x^2 + y(x)^2 - 1}{y(x)^2 + x^2 + 1}.$$

(1P)

Man beachte, dass $y(x) \neq 0$, so dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist. (Dies wird durch Widerspruch klar: Angenommen, es gäbe ein $x \in (0, \sqrt{2})$ mit $y(x) = 0$. Dann ist

$$F(x, y(x)) = F(x, 0) = x^4 - 2x^2 \stackrel{!}{=} 0$$

nur für $x = 0$ oder $x = \sqrt{2}$ erfüllt. Diese Punkte liegen jedoch beide nicht im Definitionsbereich der Funktion y.)
Da $x \neq 0$, gilt

$$\begin{aligned} y'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow x^2 + y(x)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y(x)^2 = 1. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in $F(x, y(x)) = 0$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 - 2(x^2 - (1 - x^2)) = 0 \quad &\Leftrightarrow 4x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Beachte, dass nur die Lösung $x_0 = \sqrt{\frac{3}{4}}$ im Definitionsbereich von y liegt und dadurch die negative Lösung ausgeschlossen werden kann. Damit ist x_0 die einzige kritische Stelle im Definitionsbereich der Funktion. Um zu unterscheiden, ob es sich um ein Minumum/Maximum handelt, berechnen wir implizit die zweite Ableitung von y. Betrachte dafür die Gleichung

$$y(x)y'(x) = -x\frac{x^2 + y(x)^2 - 1}{y(x)^2 + x^2 + 1} = -x\left(1 - \frac{2}{x^2 + y(x)^2 + 1}\right).$$

Differenzieren wir auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$y'(x)^2 + y(x)y''(x) = -\left(1 - \frac{2}{x^2 + y(x)^2 + 1}\right) - 2x\frac{2x + 2y(x)y'(x)}{(x^2 + y(x)^2 + 1)^2}.$$

In x_0 ist $y'(x_0) = 0$ und $x_0^2 + y(x_0)^2 = 1$ und somit gilt

$$\begin{aligned} y(x_0)y''(x_0) &= -\left(1 - \frac{2}{x_0^2 + y(x_0)^2 + 1}\right) - \frac{4x_0^2}{(x_0^2 + y(x_0)^2 + 1)^2} \\ &= -x_0^2 \\ &< 0. \end{aligned}$$

(1P)

Daraus ergeben sich zwei Fälle:
1. Fall: $y(x_0) > 0$. In diesem Fall ist $y''(x_0) < 0$ und im Punkt x_0 liegt ein isoliertes lokales Maximum vor.
2. Fall $y(x_0) < 0$. In diesem Fall ist $y''(x_0) > 0$ und im Punkt x_0 liegt ein isoliertes lokales Minimum vor.
Beachte, dass wie oben $y(x_0) = 0$ ausgeschlossen werden kann. (1P)

Bemerkung: Die durch die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ (mit F wie oben) beschriebene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist eine Kurve in der Ebene, die als "liegende Acht" treffend beschrieben ist. Bekannter ist die Bezeichnung "Lemniskate von Bernoulli", unter diesem Stichwort können Sie zahlreiche Abbildungen finden und mit dem Ergebnis der obigen Rechnung vergleichen.

31. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := y^x$$

berechne man das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in (x_0, y_0),
(b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

Lösung Aufgabe 31.

(a) Die partiellen Ableitungen erster Ordunung sind gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} e^{x\log(y)} = e^{x\log(y)}\log(y) = y^x \log(y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,1) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = xy^{x-1}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,1) = 0$$

und somit folgt für die Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= y^x \log(y)^2 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,1) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) &= x(x-1)y^{x-2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0,1) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) &= y^{x-1} + xy^{-1}y^x \log(y) \\
&= y^{x-1}(1 + x\log(y)) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,1) &= 1
\end{aligned}$$

Schließlich benötigen wir noch die partiellen Ableitungen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,y) &= y^x \log(y)^3 \\
\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(0,1) &= 0 \\
\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x,y) &= x(x-1)(x-2)y^{x-3} \\
\frac{\partial^3}{\partial y^3} f(0,1) &= 0 \\
\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x,y) &= xy^{x-1}\log(y)^2 + 2y^{x-1}\log(y) \\
&= y^{x-1}(x\log(y)^2 + 2\log(y)) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f(x,y) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x,y) \\
\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} f(x,y) &= (x-1)y^{x-2}(1 + x\log(y)) + y^{x-2}x \\
&= y^{x-2}((x-1)(1+x\log(y)) + x) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial y \partial x \partial y} f(x,y) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x,y) \\
\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(0,1) &= -1.
\end{aligned}$$

(1P)

Damit können wir nun das Taylorpolynom in $(x_0, y_0) = (0,1)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
y^x &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}\langle (x-x_0, y-y_0), Hessf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\rangle \\
&+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(x_0,y_0)(y-y_0)^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)\right. \\
&\left. +3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2\right) + R_4(h)
\end{aligned}$$

wobei der Restterm R_4 Terme höherer Ordnung enthält. Setzen wir (x_0, y_0) sowie die Ableitungen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} y^x &= f(0,1) + \frac{1}{2}\langle (x, y-1), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x, y-1)\rangle + \frac{1}{6} \cdot 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} f(0,1) x (y-1)^2 + R_4(h) \\ &= 1 + x(y-1) - \frac{1}{2} x(y-1)^2 + R_4(h). \end{aligned}$$

(1P)

(b) Nutzen wie die Reihendarstellung der Exponentialfuntion, so erhalten wir

$$y^x = e^{x \log(y)} = 1 + x \log(y) + \frac{x^2}{2} \log(y)^2 + \dots .$$

Setzen wir nun auch noch

$$\log(y) = \log(1 + (y-1)) = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} \pm \dots$$

(1P)

ein, so erhalten wir

$$y^x = 1 + x(y-1) - x\frac{(y-1)^2}{2} + \text{ Terme höherer Ordnung.}$$

(1P)

32. Gegeben seien Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, die ein Dreieck

$$\Delta := \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 : 0 \le \lambda_i, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

bilden. In einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ sei die Summe der Abstände zu den a_i minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen benachbarten Vektoren $a_i - x$ stets $\frac{2\pi}{3}$ beträgt.

Lösung Aufgabe 32. Für jedes $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ ist die Summe der Abstände zu den a_i gegeben durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} |x - a_i|.$$

Um $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ zu finden, so dass diese Summe minimal wird, minimieren wir $f(x)$. Dazu betrachten wir den Gradienten

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{x - a_i}{|x - a_i|}$$

(1P)

und lösen $\nabla f(x) \stackrel{!}{=} 0$ (1P). Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann man auf verschiedene Weisen behandeln, die entscheidende Tatsache in allen Fällen ist jedoch, dass $\left|\frac{x-a_i}{|x-a_i|}\right| = 1$ für jedes $i = 1, 2, 3$.

1. Möglichkeit (geometrisch/zeichnerisch): Die Vekotoren $v_i := \frac{x-a_i}{|x-a_i|}$ sind Einheitsvektoren. Ergibt jedoch die Summe dreier Einheitsvektoren 0, so bilden $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3$ ein gleichseitiges und somit gleichwinkliges Dreieck. Die Innenwinkel betragen dann jeweils $\frac{\pi}{3}$, also die Winkel zwischen zwei benachbarten Vektoren $a_i - x$ stets $\frac{2\pi}{3}$.

2. Möglichkeit (rechnerisch): Man setzt $v_i = e^{i\phi_i}$ für ein $\phi_i \in (0, 2\pi]$ und $i = 1, 2, 3$. Dann lautet die notwendige Bedingung für ein Extremum

$$\sum_{i=1}^{3} e^{i\phi} = 0.$$

Schreiben wir $\phi_2 = \phi_1 + \delta_2$ und $\phi_3 = \phi_1 + \delta_3$, so ist dies äquivalent zu der Forderung, dass

$$\sum_{i=1}^{3} e^{i\phi_1}(1 + e^{i\delta_2} + e^{i\delta_3}) = 0$$

oder $e^{i\delta_2} + e^{i\delta_3} = -1$. Zerlegt man diese Gleichung in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir

$$\cos(\delta_2) + \cos(\delta_3) = -1$$
$$\sin(\delta_2) + \sin(\delta_3) = 0$$

Mit Pythagoras folgt aus der zweiten Gleichung, dass $\cos(\delta_2)^2 = \cos(\delta_3)^2$, wobei auf Grund der ersten Gleichung nur $\cos(\delta_2) = \cos(\delta_3) = \frac{1}{2}$ möglich ist. Auf $(0, 2\pi]$ sind die Lösungen gegeben durch $\delta_2 = \frac{2\pi}{3}$ und $\delta_3 = \frac{4\pi}{3}$ (oder anders herum). Damit folgt ebenfalls die Behauptung. (jeweils 2P)