Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
10.06.2020
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

29. Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *konform* in $x \in \Omega$, wenn es eine Zahl $\rho(x) > 0$ gibt, so dass für die Jacobi-Matrix $Df(x)$ gilt

$$Df(x)^\top Df(x) = \rho(x)^2 E_n,$$

wobei E_n die $n \times n$- Einheitsmatrix ist. f heißt konform in Ω, wenn f in jedem $x \in \Omega$ konform ist. Zeigen Sie, dass die Inversion

$$i : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, \;\; x \mapsto i(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

an der Einheitssphäre (vgl. Aufgabe 14 (b)) konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante $\det Di(x)$?

30. Es sei $y : (0, \sqrt{2}) \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto y(x)$, eine differenzierbare Funktion, die der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ für

$$F(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

genügt. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion y, und entscheiden Sie, in welchen Fällen es sich um ein Maximum beziehungsweise ein Minimum handelt.

Hinweise:

- Es gibt genau zwei solche Funktionen.
- Aus der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ berechne man zunächst mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung $y'(x)$, *ohne* explizit nach y aufzulösen!

Bitte wenden!

31. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) := y^x$$

berechne man das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$

(a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in (x_0, y_0),

(b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmusreihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässige.

32. Gegeben seien Punkte $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, die ein Dreieck

$$\Delta := \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 : 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

bilden. In einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ sei die Summe der Abstände zu den a_i minimal. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen benachbarten Vektoren $a_i - x$ stets $\frac{2\pi}{3}$ beträgt.

Abgabe: elektronisch bis Mi., 17.06., 15.00 Uhr