Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
03.06.2020
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

25. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0).$$

Ist f im Nullpunkt stetig?

Lösung:

Zunächst sei die Zusatzfrage beantwortet: Wegen $|f(x,y)| \leq |xy|$ ist f stetig in $(0,0)$. 1 P.

Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = \dots \\ &= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}(x^4 + 4x^2y^2 - y^4) \end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)$$

1 P.

Für $(x,y) = (0,0)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Bigg(\underbrace{f(x,0)}_{=0}-\underbrace{f(0,0)}_{=0}\Bigg)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

sowie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$ 1 P.

Für die zweiten Ableitungen im Nullpunkt ergibt sich daraus

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^4}{y^4}=-1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1\neq 1=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

1 P.

26. Für $n\geq 3$ und $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x\mapsto |x|^\alpha$$

sowie $\Delta f(x):=\operatorname{div}\operatorname{grad} f(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ und bestimme denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f=0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

Lösung: Bekannt ist aus der Vorlesung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|x|=\frac{x_i}{|x|}$$

und mit der Kettenregel folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|x|^\alpha=\alpha|x|^{\alpha-2}\cdot x_i$$

1 P.

Ableitung nach x_j ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}|x|^\alpha = \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{\alpha-2}x_i = \alpha(\alpha-2)|x|^{\alpha-4}x_i x_j + \alpha|x|^{\alpha-2}\delta_{ij}$$

1 P.

Insbesondere haben wir für $i = j$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-2}\left(1 + (\alpha-2)\frac{x_i^2}{|x|^2}\right)$$

Summation über $i \in \{1, ..., n\}$ liefert: $\Delta|x|^\alpha = \alpha(n+\alpha-2) \cdot |x|^{\alpha-2}$. 1 P.

Daraus folgt $\Delta|x|^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n + \alpha - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 - n$. 1 P.

27. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2z^3 - 3yz$$

im Punkt (1,2,1) in die Richtungen $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4)$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$.

Lösung: Es ist

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 + 2xz^3, 2xy - 3z, 3x^2z^2 - 3y)$$

1 P.

$$\Rightarrow \qquad \nabla f(1, 2, 1) = (6, 1, -3)$$

1 P.

Da f offensichtlich stetig differenzierbar und damit auch total differenzierbar ist, können die Richtungsableitungen mit Hilfe des Gradienten berechnet werden. Wir erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(1, 2, 1) = \langle (6, 1, -3), \frac{1}{\sqrt{17}}(1, 0, 4) \rangle = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (-6)$$

1 P.

und

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_2}(1, 2, 1) = \langle (6, 1, -3), \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot 10.$$

1 P.

28. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy}; & xy \neq 0 \\ 0; & xy = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,

(b) die Formel $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0)\xi$ für f nur in Ausnahmefällen zutrifft,

(c) f im Nullpunkt unstetig ist.

Lösung. Zum Beweis von (a) sei $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

(i) $\xi_1\xi_2 = 0$, also $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$: Dann ist $f(t\xi) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ und daher

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg(\underbrace{f(t\xi)}_{=0} - \underbrace{f(0)}_{=0}\Bigg) = 0.$$

1 P.

(ii) $\xi_1\xi_2 \neq 0$, das heißt $\xi_1 \neq 1 \neq \xi_2$: Hier haben wir

$$f(t\xi) = \frac{(t\xi_1)^3 + (t\xi_2)^3}{t\xi_1 t\xi_2} = t \cdot \frac{\xi_1^2 + \xi_2^3}{\xi_1\xi_2}$$

und daher mit $f(0) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(t\frac{\xi_1^2 + \xi_2^3}{\xi_1\xi_2} - 0\right) = \frac{\xi_1^3 + \xi_2^3}{\xi_1\xi_2}$$

1 P.

Insbesondere ist in beiden Fällen die Existenz der Richtungsableitungen gezeigt.

Kommen wir zu Teil (b): Nach (a), (i) haben wir

$$\nabla f(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) \right) = (0,0)$$

und damit $\nabla f(0) \cdot \xi = 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$. Andererseits ist für alle Einheitsvektoren $\xi \notin \{e_1, \pm e_2\}$ nach der Rechnung in (a)

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \frac{\xi_1^3 + \xi_2^3}{\xi_1 \xi_2} \neq 0, \qquad \text{letzteres, sofern} \qquad \xi_1 \neq -\xi_2.$$

1 P.

Schließlich zu (c): Wählt man $(x,y) = (t, t^2)$, so hat man $f(x,y) = 1 + t^3$ und damit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{t\to 0} 1 + t^3 = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

Also ist f unstetig in $(0,0)$. 1 P.

Bemerkung zu (c): Alternativ kann man auch die Kurven $(x,y) = (t, t^k)$, $k \geq 3$ o.ä. betrachten mit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$, was ebenfalls die Unstetigkeit von f im Nullpunkt zeigt.