Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
03.06.2020
Blatt 7

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

25. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0).$$

Ist f im Nullpunkt stetig?

26. Für $n \geq 3$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^\alpha$$

sowie $\Delta f(x) := \operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ und bestimme denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

27. Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto xy^2 + x^2z^3 - 3yz$$

im Punkt (1,2,1) in die Richtungen $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(1,0,4)$ und $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$.

Bitte wenden!

28. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy}; & xy \neq 0 \\ 0; & xy = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

(a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,

(b) die Formel $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0)\xi$ für f nur in Ausnahmefällen zutrifft,

(c) f im Nullpunkt unstetig ist.

Abgabe: elektronisch bis Mi., 10.06., 15.00 Uhr