Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
27.05.2020
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

21. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Lösung. *Gegeben ist das folgende AWP zum Dgl.-system*

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \qquad && y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist nach Satz 9 (Abschnitt 1.4) der Vorlesung gegeben durch

$$y(x) = \exp_M(x) y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k M^k}{k!} . y_0 \qquad \text{1p}$$

wobei hier $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *und* $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *gilt. Wir schreiben* $xM = -xE_2 + x\sigma$ *mit* $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = -E_2$, $\sigma^3 = -\sigma$, $\sigma^4 = E_2$ *1p* *Mit der Funktionalgleichung für die Matrix-Exponentialfunktion folgt* $\exp_M(x) = e^{-x} \exp_\sigma(x)$ *mit*

$$\begin{aligned} \exp_\sigma(x) = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \sigma^k}{k!} = \sum_{k \text{ gerade}} \frac{x^k \sigma^k}{k!} + \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{x^k \sigma^k}{k!} \\ = & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l}}{(2l)!} E_2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} \sigma \\ = & \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \qquad \text{1p} \end{aligned}$$

Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$y(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos(x) - \sin(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \end{pmatrix} \qquad \text{1p}$$

22. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist definiert durch:

$\operatorname{dist}(K, A) := \inf \{\operatorname{dist}(x, A), x \in K\} = \inf \{d(x, y) : x \in K, y \in A\}$, vgl. Aufgabe 15.

Zeigen Sie:

(a) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

(b) Die Aussage in Teil (a) wird im Allgemeinen falsch, wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird.

Lösung. (a) *Nach A15 wissen wir, dass*

$$f : K \to [0, \infty), \quad x \mapsto f(x) := \operatorname{dist}(x, A)$$

stetig ist. Nach Satz 3 in Abschnitt 1.5 der Vorl. (bzw. der Folgesung daraus) nimmt f in einem Punkt $x_0 \in K$ ihr Minimum an, d.h es existiert $x_0 \in K$ so dass $\operatorname{dist}(K, A) = f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, A)$ *1p*

Nehmen wir $0 = \operatorname{dist}(K, A) = f(x_0)$ an, so folgt mit A15(a): $x_0 \notin (A^c)^\circ = (\bar{A})^c = A^c$, letzteres, da A abgeschlossen ist. Hieraus folgt $x_0 \in A$, damit $x_0 \in A \cap K$, im Widerspruch zu $A \cap K = \emptyset$ *1p*

(b) *Bsp.: $K = \{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1\}$, $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1\}$.* *1p*

Beide sind abgeschlossen (als Graphen stetiger Funktionen auf $[1, \infty)$) und es gilt $A \cap K = \emptyset$ Aber: $\operatorname{dist}(K, A) = \inf\{\ldots\} \leq \inf\{\frac{1}{x} : \ x \geq 1\} = 0$ *1p*

23. Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.
(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Lösung.

(a) *Sei* $x_n = a_n + b_n$ *eine Folge in* $A + B$. *Da* A *kompakt ist, existieren eine Teilfolge* $(a_{n_k})_k$ *in* A *und* $a \in A$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. *Die Folge* $(b_{n_k})_k$ *liegt im Kompaktum* B, *besitzt also ihrerseits eine konvergente Teilfolge* $\left(b_{n_{k_l}}\right)_l$, *deren Grenzwert wir* b *nennen. Da Teilfolgen konvergenter Folgen wieder konvergent sind, gilt* $a_{n_{k_l}} \xrightarrow[l\to\infty]{} a$.
Insgesamt: $\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = \lim\limits_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} + \lim\limits_{l\to\infty} b_{n_{k_l}} = a + b \in A + B$ *2p*

(Bereits 1p, wenn Voraussetzung und Behauptung mit Hilfe der Def. der Kompaktheit umformuliert werden.)

(b) *Bsp. (für* $n = 1$*):* $A = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}, 4, \frac{21}{5}, \ldots\}$, $B = -A$ *dann ist* A^c *eine Vereinigung offener Intervalle, also sind* A *und* B *abgeschlossen. Anderseits ist* $A + B = \mathbb{Q}$ *nicht abgeschlossen.* *2p*
Alternative für $n = 2$, $A = \{(x, \arctan(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ *und* $B = \{(b, 0) \in \mathbb{R}^2 : b \in \mathbb{R}\}$. *Dann ist* $A + B = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *und dies ist nicht abgeschlossen.*

24. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz* von F. Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\operatorname{div}(\phi \mathrm{F}) = \langle \operatorname{grad} \phi, \mathrm{F} \rangle + \phi \operatorname{div} \mathrm{F}.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$$

(hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ fest).

Lösung.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\phi \mathrm{F}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi F_i)(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) F_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \phi(x) \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)\\ &= \langle \nabla\phi(x), F(x)\rangle + \phi(x) \operatorname{div} \mathrm{F(x)} \qquad \textit{1p}\end{aligned}$$

Anwendung auf $G = \phi F$ *mit* $\phi(x) = \dfrac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$ *und* $F(x) = x$*. Nun ist* $\phi(x) = f(|x|)$ *mit* $f(r) = \dfrac{\cos(kr) - 1}{r^3}$*, so dass aufgrund des Beispiels aus der Vorlesung*

$$\nabla\phi(x) = f^{'}(|x|)\frac{x}{|x|} = \left(\frac{-k\sin(k|x|)}{|x|^3} - 3\frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^4}\right)\frac{x}{|x|}$$

und damit

$$\begin{aligned}\langle \nabla\phi(x), F(x)\rangle &= \left(\frac{-k\sin(k|x|)}{|x|^3} - 3\frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^4}\right)|x|\\ &= -\frac{-k\sin(k|x|)}{|x|^2} - 3\underbrace{\frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3}}_{=\phi(x)} \qquad \textit{2p}\end{aligned}$$

Desweiteren: $\operatorname{div}(F(x)) = 3$ *und daher* $\operatorname{div}(G(x)) = -\dfrac{k\sin(k|x|)}{|x|^2}$ *1p*