Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
27.05.2020
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

21. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \qquad & y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \qquad & y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

22. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist definiert durch:

$\operatorname{dist}(K, A) := \inf\{\operatorname{dist}(x, A), x \in K\} = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in A\}$, vgl. Aufgabe 15.

Zeigen Sie:

(a) Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

(b) Die Aussage in Teil (a) wird im Allgemeinen falsch, wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird.

23. Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.
(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Bitte wenden!

24. Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die *Divergenz* von F. Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\operatorname{div}(\phi \mathrm{F}) = \langle \operatorname{grad} \phi, \mathrm{F} \rangle + \phi \operatorname{div} \mathrm{F}.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$$

(hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ fest).

Abgabe: elektronisch bis Mi., 03.06., 15.00 Uhr