Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
20.05.2020
Blatt 5

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

17. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f. Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen $I = [0, 2]$ bzw. $J = [2, \infty)$ die Konvergenz gleichmäßig ist.

Lösung:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{für} & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für} & |x| = 1 \\ 1 & \text{für} & |x| > 1 \end{array} \right\} =: f(x)$$

(Für $|x| > 1$ ist dabei zu beachten, dass $f_n(x) = 1/(1 + \frac{1}{x^{2n}})$. 2 P.

Dabei ist die Konvergenz auf $I = [0, 2]$ *nicht* gleichmäßig, denn alle f_n sind stetig, aber die Grenzfunktion f ist unstetig in $x_0 = 1 \in I$. 1 P.

Hingegen ist die Konvergenz gleichmäßig auf $J = [2, \infty)$, denn

$$\sup_{x\geq 2} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 2} \frac{1}{1 + x^{2n}} \leq \frac{1}{1 + 4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 2} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$ 1 P.

18. In der Vorlesung zur Analysis I wurde in Abschnitt 3.4, Satz 2, bewiesen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z). \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) Auf jedem Kreis $\overline{B_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ist die Konvergenz in (1) gleichmäßig,
(b) auf $\mathbb{C}$ hingegen ist die Konvergenz *nicht* gleichmäßig.

(a) Behauptung: Auf $\overline{B_R(0)}$ gilt dies mit gleichmäßiger Konvergenz, denn

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}, \qquad \text{und} \qquad e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

und daher

$$e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)}_{\geq 0}$$

(Einzelheiten zur Rechnung finden Sie im Beweis des angegebenen Satzes. Dies konnten Sie hier verwenden.) Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\sup_{|z|\leq R}\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &\leq \sup_{|z|\leq R}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)\right)\\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{R^k}{k!}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) = e^R - \left(1+\frac{R}{n}\right)^n \geq 0\end{aligned}$$

und weiter

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\leq R}\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(e^R - \left(1+\frac{R}{n}\right)^n\right) = 0,$$

letzteres aufgrund des genannten Satzes mit $z = R$. Also haben wir auf $\overline{B_R(0)}$ die gleichmäßige Konvergenz gezeigt. 2P.

(b) Behauptung: Auf $\mathbb{C}$ ist die Konvergenz nicht gleichmäßig. Beweis: Für jedes (feste) $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &\geq \sup_{R>0}\left|e^R-\left(1+\frac{R}{n}\right)^n\right| \\
&= \sup_{R>0}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{R^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{R^k}{k!}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)\right) \\
&\geq \sup_{R>0}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=\infty
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{C}}\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|\neq 0.
$$

Bemerkung: In dieser Situation - Konvergenz auf Kreisen gleichmäßig aber nicht gleichmäßig im gesamten Definitionsbereich - spricht man von *lokal gleichmäßiger Konvergenz.* Dies ist typisch für Potenzreihen.

19. Zeigen Sie, dass für die Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ gilt

$$
\exp(A)=\exp(a)\begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}
$$

Hinweis: Es gilt $A=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und die Potenzen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

Lösung: Es ist

$$
A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\underbrace{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A_1}+\underbrace{b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A_2}
$$

Da die Matrizen A_1 und A_2 vertauschen, können wir die Funktionalgleichung zur Berechnung von $\exp(A)$ verwenden:

$\exp(A)=\exp(A_1+A_2)=\exp(A_1)\exp(A_2)=\exp(a)\cdot\exp(A_2)$, denn

$$
\exp(A_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\exp(a)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{1 P.}
$$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit für $n \geq 0$

$$A_2^n = b^n \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$ 1 P.

Es folgt

$$\begin{aligned} \exp(A_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_2^n}{n!} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{A_2^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{A_2^n}{n!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k}}{(2k)!} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cosh(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh(b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$ 1 P.

Einsetzen ergibt jetzt die Behauptung. 1 P.

20. (Poisson-Kern für den Kreis) Für $x \in \mathbb{R}$ und $q \in (-1, 1)$ sei

$$P(q, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{|k|} e^{ikx}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $r \in [0, 1)$ diese Reihe auf $\{(q, x) \in \mathbb{R}^2 : |q| \leq r\}$ absolut und gleichmässig konvergiert, und verifizieren Sie die Identität

$$P(q, x) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}.$$

Lösung: Auf $\{(q, x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |q| \leq r\}$, wobei $r < 1$ ist, hat man absolute und gleichmäßige Konvergenz. Zum Beweis wenden wir das Weierstraß-Kriterium an auf

$$f_k(q, x) = q^{|k|} e^{ikx}.$$

Hierfür ist

$$||f_k||_\infty = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ |q|\le r}} |f_k(q,x)| = r^{|k|}$$

und daher

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} ||f_k||_\infty = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{||k||} < \infty$$

(geometrische Reihe, es ist $r < 1$!). Damit ist die Konvergenzaussage gezeigt. 2 P.

Zur Berechnung verwenden wir ebenfalls die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} P(q,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{ix})^k + \sum_{k=1}^{\infty} (qe^{-ix})^k \\ &= \frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{qe^{-ix}}{1-qe^{-ix}} \\ &= \frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}(1 - qe^{-ix} + qe^{-ix} - q^2) \\ &= \frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} = \frac{1-q^2}{1-2q\cos(x)+q^2}. \end{aligned}$$

2 P.