Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
13.05.2020
Blatt 4

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

13. (Lindelöf'scher Überdeckungssatz) Zeigen Sie: Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Um dies einzusehen, vereinige man möglichst grosse Intervalle um die rationalen Elemente von U.

Lösung Aufgabe 13
Zu zeigen: Jede offene Teilmenge U von $\mathbb{R}$ lässt sich darstellen als $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, wobei die I_n offene Intervalle sind (Lindelöf'scher Überdeckungssatz).
Beweis: Es sei $U \cap \mathbb{Q} = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$. Dann setzen wir

$$a_n := \sup\{x \in U^c : x < q_n\}$$
$$b_n := \inf\{x \in U^c : x > q_n\}.$$

Da U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $(q_n - \epsilon, q_n + \epsilon) \subset U$, also mit

$$a_n \leq q_n - \epsilon < q_n < q_n + \epsilon \leq b_n$$

insbesondere gilt also $a_n < q_n < b_n$. 1P

Wir setzen $I_n := (a_n, b_n)$. Dies ist ein offenes Intervall, welches q_n umfasst. Ferner existiert kein $x \in U^c$ mit $x \leq q_n$, welches in (a_n, b_n) liegt (aufgrund der Wahl von a_n) und auch kein $x \geq q_n$ in $(a_n, b_n) \cap U^c$. Also $I_n \subset U$ und damit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset U$. 1P

Es bleibt noch $U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ zu zeigen. Dazu sei $x \in U$. Da U offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. Da $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht ist in U, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $q_{n_0} \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. 1P
Nach Wahl der a_n bzw. b_n ist $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset I_{n_0} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Da $x \in U$ beliebig war, haben wir $U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. 1P

14. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

(a)

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, x\mapsto f(x):=\frac{1}{1+|x|^2},$$

hierbei sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $|x|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ausgestattet;

(b)

$$i:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n, x\mapsto i(x):=\frac{x}{|x|^2},$$

dabei $\mathbb{R}^n$ und $|\quad|$ wie in (a).

Lösung Aufgabe 14

(a) Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x):=\frac{1}{1+|x|^2}$. Behauptung: f ist gleichmäßig stetig (und damit insbesondere stetig).

Beweis: Für $x,y\in\mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x)-f(y)&=\frac{1}{1+|x|^2}-\frac{1}{1+|y|^2}\\
&=\frac{1}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}(1+|y|^2-1-|x|^2)\\
&=\frac{1}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}(|y|^2-|x|^2)\\
&=\frac{1}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}(|y|-|x|)(|y|+|x|).
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)|&=\underbrace{\frac{|x|+|y|}{(1+|x|^2)(1+|y|^2)}}_{\le 1}\big||y|-|x|\big|\\
&\le\big||y|-|x|\big|\\
&=\big|x-y\big|
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Dreiecksungleichung folgt. 1P

Somit ist f Lipschitz-stetig mit $L=1$ und insbesondere gleichmäßig stetig. 1P

(b) Sei $i:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$ gegeben durch $i(x):=\frac{x}{|x|^2}$. Behauptung: i ist stetig (als rationale Funktion) aber nicht gleichmäßig stetig.

Zum Beweis benutzen wir das Folgenkriterium für gleichmäßige Stetigkeit. 1P

Dazu sei $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und $x_n=\frac{x}{n}$, $y_n=\frac{x}{2n}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2n}=0$$

aber

$$
\begin{aligned}
|i(x_n) - i(y_n)| &= \left| \frac{x_n}{|x_n|^2} - \frac{y_n}{|y_n|^2} \right| \\
&= \left| \frac{nx}{|x|^2} - \frac{2nx}{|x|^2} \right| \\
&= \frac{n}{|x|} \\
&\to \infty
\end{aligned}
$$

für $n \to \infty$. Damit ist i nicht gleichmäßig stetig. 1P
(Beachte: Für gleichmäßige Stetigkeit müsste der Abstand der Funktionswerte ebenfalls gegen 0 konvergieren.)

15. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A wird definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ genau dann, wenn $x \in (A^c)^\circ$.
(b) Die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

Lösung Aufgabe 15
(a) Wir haben

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \epsilon > 0 \text{ so dass } d(x, y) \geq \epsilon \; \forall \, y \in A \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \epsilon > 0 \text{ so dass } B_\epsilon(x) \subset A^c \\
\Leftrightarrow \quad & x \in (A^c)^\circ.
\end{aligned}
$$

2P

(b) Zu zeigen: $\operatorname{dist}(\cdot, A)$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.
Da d eine Metrik ist, gilt die Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

für alle $x, y, z \in X$. Bilden wir auf beiden Seiten der Ungleichung das Infimum über alle $y \in A$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \inf\{d(x,y) : y \in A\} \leq d(x,z) + \inf\{d(z,y) : y \in A\} \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{dist}(x,A) \leq d(x,z) + \operatorname{dist}(z,A) \\ \Leftrightarrow \quad & \operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(z,A) \leq d(x,z). \end{aligned}$$

Vertauschen von x und z liefert ebenso

$$\operatorname{dist}(z,A) - \operatorname{dist}(x,A) \leq d(z,x) = d(x,z).$$

Fasst man beides zusammen, ergibt sich

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(z,A)| \leq d(x,z)$$

für alle $x, z \in X$. 2P

16. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition: Ist f gleichmässig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen in (X, d_X) auf Cauchy-Folgen in (Y, d_Y) ab.

(b) Gilt die in (a) genannte Folgerung stets auch dann, wenn f lediglich stetig, aber nicht gleichmässig stetig ist?

Lösung Aufgabe 16

(a) Zu zeigen: Ist f gleichmäßig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen in (X, d_X) auf Cauchy-Folgen in (Y, d_Y) ab.
Beweis: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt

$$d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon. \tag{1}$$

Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d_X), so existiert zu diesem $\delta = \delta(\epsilon)$ ein $N = N(\delta(\epsilon)) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt

$$d_X(x_n, x_m) < \delta. \tag{2}$$

Zusammenfassen von (1) und (2) ergibt: Zu festem $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\delta(\epsilon)) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon.$$

Also ist die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (Y, d_Y). 2P
(b) Stetigkeit allein reicht für die Folgerung in (a) im Allgemeinen nicht aus. 1P
Dazu betrachte das folgende Beispiel :
Sei $(X, d_X) = ((0,1), |\cdot|)$ und definiere eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X durch $x_n = \frac{1}{n}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich eine Cauchy-Folge in (X, d_X). Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit

$f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig (hierbei sei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik ausgestattet). Für die Bildfolge erhalten wir $f(x_n) = n$, d.h.

$$|f(x_n) - f(x_m)| \geq 1 \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq m,$$

was bedeutet, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. 1P