Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
06.05.2020
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

9. Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ Normen auf $\mathbb{K}^n$ definiert werden.

Lösung: Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sind $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ und $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ wie in der Vorlesung definiert. Es sind die Normeigenschaften nachzuprüfen.

Für $\|\cdot\|_1$: **(2 Punkte)**

(N1) Sei $x \in \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_1 = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0\\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\\ &\Leftrightarrow x_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\\ &\Leftrightarrow x = 0 \ (\in \mathbb{K}^n).\end{aligned}$$

(N2) Sei $x \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_1.$$

(N3) Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|\\ &\overset{\text{Dreiecksungleichung in } \mathbb{K}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)\\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1.\end{aligned}$$

Die Normeigenschaften sind erfüllt und somit ist $\|\cdot\|_1$ eine auf $\mathbb{K}^n$ definierte Norm.

Für $\|\cdot\|_\infty$: **(2 Punkte)**

(N1) Sei $x \in \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \max_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ &\Leftrightarrow x_i = 0, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ (\in \mathbb{K}^n).\end{aligned}$$

(N2) Sei $x \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \max_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty.$$

(N3) Seien $x, y \in \mathbb{K}^n$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ &\overset{\text{Dreiecksungleichung in } \mathbb{K}}{\leq} \max_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= \max_{i=1}^{n} |x_i| + \max_{i=1}^{n} |y_i| \\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

Die Normeigenschaften sind erfüllt und somit ist $\|\cdot\|_\infty$ eine auf $\mathbb{K}^n$ definierte Norm.

10. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $p \in [1, \infty)$ sei

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweisen Sie für $p \leq q$ die Ungleichungen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Lösung: Für $x \in \mathbb{K}^n$ und $1 \leq p \leq q < \infty$ sollen die Ungleichungen

$$\|x\|_q \overset{(i)}{\leq} \|x\|_p \overset{(ii)}{\leq} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q,$$

bewiesen werden. Das heißt, es soll die Äquivalenz der p-Normen auf dem $\mathbb{K}^n$ gezeigt werden.

Zu (i). **(2 Punkte)** Ohne Einschränkungen soll $\|x\|_p \neq 0$ gelten (sonst ist ja $x = 0$ und die Ungleichung sofort ersichtlich). Betrachte den Quotienten $\|x\|_q / \|x\|_p$ genauer

$$\left(\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}\right)^q = \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_p^q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^q}{\|x\|_p^q} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^q =: (\star).$$

Nun ist $\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \leq 1$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und daher ist

$$\left(\frac{x_i}{\|x\|_p}\right)^q \leq \left(\frac{x_i}{\|x\|_p}\right)^p,$$

wegen $p \leq q$. Also folgt

$$(\star) \leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{1}{\|x\|_p^p} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1$$

und somit Ungleichung (i).

Zu (ii): **(2 Punkte)** Hier benutzen wir die Höldersche Ungleichung mit $\dfrac{1}{r} + \overbrace{\dfrac{p}{q}}^{\leq 1} = 1$:

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^n\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p \cdot \frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} = n^{1-\frac{p}{q}} \cdot \|x\|_q^p.$$

Zieht man nun die p-te Wurzel, folgt (ii).

11. Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$	(d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

Lösung: Zum Beweis der Aussagen (a)–(d) werden wir häufig Satz 4 aus Abschnitt 1.2 der Vorlesung verwenden, insbesondere Satz 4 (1) mit der Aussage

(1) $$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \overline{M}_1 \subset \overline{M}_2 \text{ und } M_1^\circ \subset M_2^\circ$$

(a) **(1 Punkt)** Es gilt

$$A \subset \overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B},$$

genauso wie $B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ und damit

$$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \overset{\text{Satz 4 (4)}}{=} \overline{A} \cup \overline{B},$$

da $\overline{A} \cup \overline{B}$ abgeschlossen ist. Andererseits gilt

$$A \subset A \cup B \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{A} \subset \overline{A \cup B},$$

genauso wie $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, woraus sich

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

ergibt. Zusammenfassend erhalten wir

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}.$$

(b) **(1 Punkt)** Es gilt

$$A \cap B \subset A,\ B \overset{(1)}{\Rightarrow} (A \cap B)^\circ \subset A^\circ,\ B^\circ \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ.$$

Umgekehrt gilt, da $A^\circ \subset A$ und $B^\circ \subset B$, ist, auch $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. Mit Satz 4 (3) und (1) folgt dann

$$A^\circ \cap B^\circ = (A^\circ \cap B^\circ)^\circ \subset (A \cap B)^\circ.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ.$$

(c) **(1 Punkt)** Es gilt

$$A \subset \overline{A},\ B \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B} \overset{(1)}{\Rightarrow} \overline{A \cap B} \subset \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \overset{\text{Satz 4 (4)}}{=} \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Wählt man $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$, hat man $A \cap B = \emptyset$ und also auch $\overline{A \cap B} = \emptyset$, whrend $\overline{A} = \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass die andere Inklusion im Allgemeinen nicht gilt.

(d) **(1 Punkt)** Wir haben $A^\circ \subset A$, $B^\circ \subset B$ und damit $A^\circ \cup B^\circ \subset A \cup B$. Mit Satz 4 (3) folgt

$$A^\circ \cup B^\circ = (A^\circ \cup B^\circ)^\circ \overset{(1)}{\subset} (A \cup B)^\circ.$$

Auch hier liefert $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Q}^c$ ein Gegenbeispiel für die andere Inklusion, denn $A^\circ = \emptyset$, $B^\circ = \emptyset$, somit gilt $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$ und $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$.

12. Bestimmen Sie ∂M, $\overline{M}$ und M° für die Teilmenge

$$M := \left\{ (x, \cos\frac{1}{x}) : 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$, der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

Lösung:

Behauptung: Es ist

1. $M^\circ = \emptyset$ und $\partial M = \overline{M}$,
2. $\overline{M} = \{(0, y) : |y| \leq 1\} \cup \{(x, \cos\frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$.

Für die richtige Behauptung gibt es bereits **1 Punkt**.

Begründung:

1. **(1 Punkt)** Ist $\varepsilon > 0$ und $(x, \cos\frac{1}{x}) \in M$, so ist $(x, \cos(\frac{1}{x}) + \varepsilon) \notin M$. Also besitzt M keinen inneren Punkt. Wir haben $M^\circ = \emptyset$ und daher $\overline{M} = \partial M$ (Definition ∂M).
2. Wir zeigen beide Inklusionsrichtungen.
   "$\supset$": **(1 Punkt)** Ist (x_n) eine Folge in $(0, \frac{1}{\pi})$ mit $x_n \nearrow \frac{1}{\pi}$, so gilt auch
   $$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{x_n} = \cos\pi = -1,$$
   denn $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. also ist $(\frac{1}{\pi}, -1) \in \overline{M}$.
   Ist $y \in [-1, 1]$ vorgegeben, gibt es eine Folge (t_n) in (π, ∞) mit $\cos(t_n) = y$ und $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Mit $x_n := \frac{1}{t_n}$ und (x_n, y) erhalten wir eine Folge in M, die gegen $(0, y)$ konvergiert. Also gilt $(0, y) \in \overline{M}$, für alle $y \in [-1, 1]$.
   Damit ist gezeigt, dass die angegebene Menge Teilmenge von $\overline{M}$ ist.

   "$\subset$": **(1 Punkt)** Nun sei $(x_n, \cos\frac{1}{x_n})$ eine Folge in M, die in $\mathbb{R}^2$ konvergiert. Dann konvergiert insbesondere die reelle Zahlenfolge (x_n).
   Fall (i): Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in (0, \frac{1}{\pi}]$. Dann folgt wegen der Stetigkeit des Kosinus, dass
   $$\lim_{n\to\infty}(x_n, \cos\frac{1}{x_n}) = (x_0, \cos\frac{1}{x_0}) \in \{(x, \cos\frac{1}{x}) : 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}.$$
   Fall (ii): Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{x_n} =: y_0$ existiert. Dann gilt $|y_0| \leq 1$ und
   $$\lim_{1\to\infty}(x_n, \cos\frac{1}{x_n}) \in \{(0, y) : |y| \leq 1\}.$$
   Weitere Grenzwerte kommen für (x_n) nicht in Frage. Damit ist dann die Mengengleichheit gezeigt.