Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
29.04.2020
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

5. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \quad dx,$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2},$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+2x^2+1} dx.$

Machen Sie dabei in geeigneter Weise kenntlich, welches die problematischen Integralgrenzen sind! Hinweis zu Teil (d): Partialbruchzerlegung.

(a) Es ist

$$\int_0^1 \ln(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \ln(x)\ dx.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\int \ln(x)\ dx = x(\ln(x)-1),$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)\ dx &= \lim_{\varepsilon \searrow 0}\ x(\ln(x)-1)\Big|_\varepsilon^1 \\ &= -1 - \lim_{\varepsilon \searrow 0}\ \varepsilon(\ln(\varepsilon)-1) \\ &= -1,\end{aligned}$$

denn es gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \ln(\varepsilon) = 0$ (s. Vorl.)

(b) Hier haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon,\delta\searrow 0} \int_{-1+\delta}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{\varepsilon,\delta\searrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(-1+\delta) \\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) - \lim_{\delta\searrow 0} \arcsin(-1+\delta) \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+(x+1)^2} \\
&= \lim_{R\to\infty} \arctan(R+1) - \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \lim_{R,S\to\infty} \int_{-R}^{S} \frac{dx}{x^4+2x^2+1}.
$$

Beachten Sie, dass im allgemeinen $R \neq S$! Zur Berechnung schreiben wir

$$
\frac{1}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2
$$

und verwenden die für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ gültige Identität

$$
\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2-i^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+1}\right)
$$

(allgemeiner gilt $\frac{1}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)$!), also

$$
\frac{1}{x^4+2x^2+1} = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(x-i)^2} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x+i)^2}\right\}.
$$

Dabei gilt

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x\pm i)^2} = \lim_{R,S\to\infty} \left.\frac{-1}{x\pm i}\right|_{-R}^{S} = 0 - 0 = 0
$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{R,S\to\infty} \arctan(x)\Big|_{-R}^{S} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{S\to\infty} \arctan(S) - \lim_{R\to\infty} \arctan(-R) \right) = \frac{\pi}{2}.$$

6. Untersuchen Sie, ob die nachstehenden uneigentlichen Integrale existieren:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \quad dx,$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad dx,$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin\left(x^2\right) \quad dx,$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

Hinweis: In Teil (d) führt die Substitution $t = \frac{1}{x}$ zum Ziel.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)dx = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \sin(x)dx$$
$$= \lim_{a,b\to\infty} \cos(a) - \cos(b) \quad \text{existiert } \textit{nicht,}$$

(auch wenn eine ungerade Funktion auf einem symmetrischen Integrationsintervall vorliegt. An diesem Beispiel kann man recht schön den Unterschied zwischen dem uneigentlichen Integral und dem sogenannten Cauchy'schen Hauptwert, das ist hier

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \sin(x)dx = \lim_{R\to\infty} \cos(R) - \cos(-R) = 0$$

erkennen. Letzterer existiert, da bei der Grenzwertbildung nur symmetrische Intervalle betrachtet werden. Das uneigentliche Integral existiert jedoch nicht, hierfür sind unabhängige Grenzwerte für die oberen und die unteren Integralgrenzen gefordert.)

(b)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

mit

$$\int_0^R \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx}_{\substack{\text{existiert als}\\ \text{eigentliches Integral}}} + \int_1^R \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

und

$$\int_1^R \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x)\Big|_1^R + \int_1^R \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{x^{3/2}}\cos(x)\, dx$$

D.h.

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\, dx + \cos(1) - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^{3/2}}\, dx$$

und das letzte Integral existiert nach dem Majorantenkriterium. Also konvergiert das Integral in (b).

Das Argument zeigt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert

$$\int_1^\infty x^{-\varepsilon}\sin(x)\, dx,$$

das Integral $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\varepsilon}\sin(x)\, dx$ existiert $\forall \varepsilon \in (0,2)$.

(c) Mit der Substitution $x^2 = t$, $dt = 2xdx$ (beachte: $x \mapsto x^2$, $(0,\infty) \to (0,\infty)$, ist bijektiv) sehen wir

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}},$$

und dieses Integral existiert nach Teil (b).

(d)

$$\int_0^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon\searrow 0\\ R\to\infty}} \int_\varepsilon^R \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\, dx,$$

und die angegebene Substitution $t = 1/x$, $dt/dx = -1/x^2$ bzw. $dx = -dt/t^2$ ergibt

$$\int_\varepsilon^R \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_{1/\varepsilon}^{1/R} \sin^2(t)\frac{dt}{t^2} = \int_{1/R}^{1/\varepsilon} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt,$$

$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ liefert

$$\int_0^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ dt + \int_1^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\ dt.$$

Das erste Integral ist ein Integral im eigentlichen Sinn, denn der Integrand ist für $t = 0$ stetig durch den Wert 1 ergänzbar. Das zweite Integral existiert nach dem Majorantenkriterium. Also existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \sin^2(1/x)\ dx$.

Bemerkung: Eine Variation des Arguments zeigt:

$$\int_0^\infty \sin(1/x)\ dx$$

konvergiert *nicht*.

7. Die *Eulersche Beta-Funktion* wird definiert durch das (ggf. uneigentliche) Integral

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Zeigen Sie:

(a) $B(x,y)$ konvergiert für alle positiven reellen Zahlen x und y.

(b) $B(x,y)$ divergiert, falls $x \leq 0$ oder $y \leq 0$.

Wir schreiben

$$B_0(x,y) := \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt$$

und

$$B_1(x,y) := \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

(a) Wir betrachten zunächst B_0 und fixieren dazu $y \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $C = C(y) > 0$, so dass für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt: $(1-t)^{y-1} \leq C$. Es folgt $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq Ct^{x-1}$ (auf $[0, \frac{1}{2}]$). Das Beispiel (2) in Abschnitt 6.5 der Vorlesung liefert zusammen mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von B_0 für $x > 0$ und beliebiges $y \in \mathbb{R}$. Genauso sieht man, dass B_1 für jedes $y > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zusammenfassung: Sind $x > 0$ und $y > 0$, so existieren $B_0(x,y)$ und $B_1(x,y)$ und damit auch $B(x,y) = B_0(x,y) + B_1(x,y)$.

(b) Sei $x \leq 0$ und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist für $t \in [0, \frac{1}{2}]$: $(1-t)^{y-1} \geq \min\left(1, \frac{1}{2^{y-1}}\right) =: c > 0$ und damit $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geq ct^{x-1}$. Das genannte Beispiel ergibt zusammen mit dem Majorantenkriterium die Divergenz von $B_0(x,y)$ und somit auch von $B(x,y)$, denn der Integrand ist nicht negativ. In gleicher Weise sieht man die Divergenz von $B(x,y)$, falls $y \leq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist.

8. Zeigen Sie für die in Aufgabe 7 definierte Beta-Funktion:

(a) $B(x,y) = B(y,x)$,

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}$.

Nach wie vor sei

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

(a) Behauptung: $B(x,y) = B(y,x)$

Beweis:

$$B(x,y) = \lim_{\varepsilon,\delta \searrow 0} \int_\delta^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

Mit der Substitution $s = 1-t$ (“$ds = -dt$”) (1 P. für die Substitution, 1 P. für die richtige Ausführung des Folgenden) sehen wir

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \lim_{\varepsilon,\delta \searrow 0} \left(- \int_{1-\delta}^{1-(1-\varepsilon)} (1-s)^{x-1} s^{y-1}\ ds \right) \\ &= \lim_{\varepsilon,\delta \searrow 0} \int_\varepsilon^{1-\delta} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\ dt = \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\ dt = B(y,x). \end{aligned}$$

(b) Behauptung: $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Beweis per Induktion über n, beginnend mit $n = 1$:

$$B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\ dt = \left.\frac{t^x}{x}\right|_0^1 = \frac{1}{x}.$$

(Soweit: 1 P.) Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$B(x, n+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n \; dt = \lim_{\varepsilon,\delta \searrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^n \; dt$$

Nun ergibt partielle Integration, dass

$$\int_\delta^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^n \; dt = \frac{t^x}{x}(1-t)^n \Big|_\delta^{1-\varepsilon} + \int_\delta^{1-\varepsilon} \frac{t^x}{x} \cdot n(1-t)^{n-1} \; dt.$$

Im Grenzwert $\varepsilon, \delta \to 0$ also

$$B(x, n+1) = \frac{n}{x} B(x+1, n) = \frac{n!}{x \cdot \prod_{k=0}^{n-1}(x+1+k)} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)},$$

und das ist die Behauptung für $n+1$ anstelle von n. (1 P. für den Induktionsschritt)