Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2020
22.04.2020
Blatt 1

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II

Empfehlung: Stellen Sie zu Ihrem eigenen Gebrauch eine Tabelle mit 15 bis 20 Funktionen und zugehörigen Stammfunktionen zusammen, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind. Diese Tabelle sollte auch - als Stammfunktionen - die Umkehrfunktionen der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen umfassen.

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch (ggf. mehrfache) partielle Integration:

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ (b) $\int x^a \ln(x) dx$

(c) $\int \exp(ax) \sin(x) dx$ (d) $\int \arcsin x dx$

Hierbei ist a ein reeller Parameter.

.

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx = \int \underbrace{x}_{U} \underbrace{\tan'(x)}_{V'} dx = x\tan(x) - \int \tan(x) dx$

Nun ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos(x)'}{\cos(x)}$

und daher $\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|)$ (s. Vorl.), also

$\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx = x\tan(x) + \ln(|\cos(x)|)$

(b) $\int x^a \ln(x) dx = ?$

(i) $a = -1: \int \ln(x)\frac{1}{x} dx = \int \ln(x)\ln'(x) dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$

(ii) $a \neq -1: \int \underbrace{x^a}_{U'} \underbrace{\ln(x)}_{V} dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\ln(x) - \int \frac{x^a}{a+1} dx = \frac{1}{a+1}\left(x^{a+1}\ln(x) - \frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)$

(c) $\int \underbrace{\exp(ax)}_{U} \underbrace{\sin(x)}_{V'} dx = -\exp(ax)\cos(x) + a\int \exp(ax)\cos(x) dx =$

$-\exp(ax)\cos(x) + a\exp(ax)\sin(x) - a^2 \int \exp(ax)\sin(x) dx$

$\Rightarrow \int \exp(ax)\sin(x) dx = \frac{\exp(ax)}{1+a^2}(a\sin(x) - \cos(x))$ (Stimmt auch für $a = 0$!)

(d) $\displaystyle\int \arcsin(x)dx = \int 1\cdot\arcsin(x)dx \qquad\qquad (\text{mit } 1 = \frac{d}{dx}x)$

$\displaystyle = x\arcsin(x) - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad\qquad (\text{da } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$

$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

In letzten Schritt wurde verwendet, dass der Integrand $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ die Gestalt $\phi'(x)f(\phi(x))$ mit $\phi(x) = -x^2$ hat, vgl. Aufgabe 2.

(Bem: Das Integral $\displaystyle\int \ln(x)dx = \int 1\cdot\ln(x)dx = \cdots = x(\ln(x)-1)$ wurde als Beispiel zur partiellen Integration in der Vorlesung behandelt und bemerkt, dass die Integrale

$\displaystyle\int \arctan(x)dx$ und $\displaystyle\int \arcsin(x)dx$ mit demselben "Trick" berechnet werden können.)

2. Die folgenden Ausdrücke haben exakt die Gestalt $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Geben Sie die zugehörigen Stammfunktionen an.

(a) $\dfrac{2x}{1+x^4}$

(b) $\dfrac{\tan^k(x)}{\cos^2(x)},\quad k\in\mathbb{Z}$

(c) $\dfrac{1}{x\ln x}$

(d) $\cot x$

(e) $x^x(1+\ln x)$.

Hinweis: In Teil (b) ist der Fall $k=-1$ gesondert zu behandeln. Durch die Bearbeitung von Teil (e) kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

(a) $\dfrac{2x}{1+x^4} = f(\phi(x))\cdot\phi'(x)$ für $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ und $\phi(x) = x^2$, also

$\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4} = \arctan(x^2)$

(b) $\tan(x)^k\dfrac{1}{\cos^2(x)} = f(\phi(x))\phi'(x)$ für $f(y) = y^k$ und $\phi(x) = \tan(x)$ (denn : $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$)

(i) $k=-1$:

$$\int \frac{1}{\tan(x)\cos^2(x)}dx = \ln(|\tan(x)|)$$

(ii) $k \neq -1$:
$$\int \tan^k(x) \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{k+1} \tan^{k+1}(x)$$

(c) $\dfrac{1}{x\ln(x)} = f(\phi(x))\phi'(x)$ für $\phi(x) = \ln(x)$ und $f(y) = \dfrac{1}{y}$. Also
$$\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \ln(|\ln(x)|)$$

(d) $\displaystyle\int \cot(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \int \frac{\sin(x)'}{\sin(x)}dx = \ln(|\sin(x)|)$

($\displaystyle\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|)$ wurde in der Vorleung hergeleitet.)

(e) $x^x\,(1+\ln(x)) = \underbrace{\exp}_{f}(\underbrace{x\ln(x)}_{\phi(x)})(\underbrace{1+\ln(x)}_{\phi'(x)=1+\ln(x)})$ also $\displaystyle\int x^x\,(x+\ln(x))\,dx = x^x$.

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale durch geeignete Umformungen der Integranden:

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx$

(b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\cos(x)}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$

Hinweis: In Teil (b) führt eine Partialbruchzerlegung zum Ziel, vgl. hierzu: Kaballo, Einführung in die Analysis I, Abschnitt 28.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-1}dx = \int \frac{x^3-x}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-1}dx = \int xdx + \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} + \ln(|x-1|)$.
$$\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + \ln(x-1)\Big|_2^3 = \frac{5}{2} + \ln(2).$$

(b) Herstellung einer PBZ für $\mathcal{R}(x) = \dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ durch den Ansatz
$$\mathcal{R}(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Longrightarrow x-3 = (x-2)A + (x-1)B.$$

Einsetzen: $x = 1 : -2 = -1.A$, also $A = 2$, $\qquad x = 2 : -1 = B$,

Also $\mathcal{R}(x) = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

(Tatsächlich ergibt die Probe $= \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} \underbrace{(2x-4-x+1)}_{=x-3}$).

Damit : $\displaystyle\int_3^4 \mathcal{R}(x)dx = [2\ln(|x-1|) - \ln(|x-2|)]_3^4 = \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x-2}\right)\Bigg|_3^4$

$= \ln(\dfrac{9}{2}) - \ln(4) = \ln(\dfrac{9}{8})$.

(c) $\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) \Rightarrow 1 + \cos(x) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$. Für $x \in [0, \pi]$ also:

$\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})$

(Man achte auf das Vorzeichen!)

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\sqrt{1+\cos(x)}dx = \sqrt{2}\int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\pi \sin(x)dx = \sqrt{2}$

$(*) \sin(x) = \sin(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$.

(d) $\displaystyle\int \sin^{2n+1}(x)dx = \int \sin^{2n}(x)\sin(x)dx = -\int (1-\cos^2(x))^n \cos'(x)dx =$

$\displaystyle -\int (1-y^2)^n dy\Bigg|_{y=\cos(x)} = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int (-1)^k y^{2k} dy\Bigg|_{y=\cos(x)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \cos(x)^{2k+1}$

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1}(x)dx = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \left(\underbrace{\cos(\pi)^{2k+1}}_{-1} - \underbrace{\cos(0)^{2k+1}}_{1}\right) = 2\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

4. Leiten Sie Rekursionsformeln der Gestalt

$$a_n I_{n+2}(x) = f_n(x) + b_n I_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

für die folgenden unbestimmten Integrale her:

(a) $I_n(x) = \displaystyle\int (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx \qquad (|x| < 1)$

(b) $I_n(x) = \displaystyle\int \tan^n(x)dx \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

Geben Sie auch Stammfunktionen für spezielle Werte von n an, die es im Prinzip erlauben, mit Hilfe der Rekursionsformel $I_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu berechnen.

Hinweis: In Teil (a) führt partielle Integration zum Ziel, für Teil (b) beachte man $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ und verwende die Substitutionsregel.

(a) $I_{n+2} = \int (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} dx = \int 1 \cdot (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} dx = x(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} - \int x \underbrace{\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}}_{\frac{n+1}{2}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}.(-2x)} =$

$= x(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} + (n+1)\int x^2(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx$

$= x(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} + (n+1)\underbrace{\int (x^2-1)(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx}_{-I_{n+2}(x)} + (n+1)\underbrace{\int (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx}_{I_n(x)}$

$\underline{(n+2)I_{n+2}(x) = x(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} + (n+1)I_n(x)}$ <u>1P.</u>

Mit $I_0(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ und $I_1(x) = \int dx = x$ ist jetzt die rekursive Berechnung aller $I_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ möglich, ohne dass noch einmal integriert werden müsste. <u>1P.</u>

(b) $I_{n+2}(x) = \int \tan^{n+2}(x)dx = \int \tan^n(x).\tan^2(x)dx$

$= \int \tan^n(x).\tan'(x)dx - \int \tan^n(x)dx$

$= \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x) - I_n(x)$, also

$\underline{I_{n+2}(x) = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x) - I_n(x)}$ <u>1P.</u>

$I_0(x) = \int dx = x, \int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|)$ <u>1P.</u>