3.3 Der Gauss'sche Integralsatz ("Divergence Theorem")

Vorbem.: Wir werden diesen Satz zuerst unter recht allgemeinen (schwachen) Voraussetzungen formulieren, was ein paar Definitionen erfordert. Für den Beweis werden wir allerdings zwei zusätzliche Bedingungen stellen, die die Argumentation wesentlich vereinfachen.

Def.: Eine beschränkte, offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein C^1-Polyeder, wenn ihr Rand ∂G eine $(n-1)$-dimensionale glatte Fläche ist. Den regulären Teil des Randes bezeichnen wir mit $\partial_r G$.

Bem. (1) Ist $\partial_r G$ überall lokal als Nullstellenmenge einer C^k-Funktion darstellbar, so spricht man von einem C^k-Polyeder, wobei $k=\infty$ möglich ist.

Bsp.: Offene Polyeder (etwa Quader), offene Kugeln bezüglich einer p-Norm $(1 \leq p \leq \infty)$ auf dem $\mathbb{R}^n$ sind C^∞-Polyeder. Konvexität ist hierbei nicht verlangt.

(2) Der reguläre Rand $\partial_r G$ eines C^1-Polyeders ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermfkt. des $\mathbb{R}^n$. Für $x \in \partial_r G$ ist der Normalenraum $T_x(\partial_r G)^\perp$ eindimensional. Es gibt also genau einen

Normalenvektor $\nu(x)$ in x mit $|\nu(x)| = 1$, der aus G hinausweist. Dieser wird als „der äußere Normaleneinheitsvektor" (von G in x) bezeichnet. (3)

(3) Bestimmung von $\nu(x)$ für $x \in \partial_r G$:

Für ein $\varepsilon_0 > 0$ sei $B_{\varepsilon_0}(x) \cap \partial G = \{y \in B_{\varepsilon_0}(x) : F(y) = 0\}$ mit einer Funktion $F \in C^1(B_{\varepsilon_0}(x))$. Dann können wir durch Wahl des Vorzeichens von F und ggf. von $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ erreichen, dass

$$B_\varepsilon(x) \cap G = \{y \in B_\varepsilon(x) : F(y) < 0\}.$$

In diesem Fall ist $\nu(x) = \dfrac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$, denn für $h > 0$ gilt

$$F(x + h \cdot \nabla F(x)) = F(x) + h \langle \nabla F(x), \nabla F(x) \rangle + r(x, h)$$

$$= h \cdot |\nabla F(x)|^2 + r(x,h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(x,h)}{h} = 0,$$

so dass für hinreichend kleines $h > 0$ gilt, dass $F(x + h \nabla F(x)) > 0$. Das bedeutet $x + h \nabla F(x) \notin G$, $\nabla F(x)$ zeigt also aus G heraus. Da $F \in C^1$ ist, hängt $\nu(x)$ stetig von x ab.

(4) Das Flächenmaß auf ∂G sei mit σ bezeichnet. Ferner betrachten wir stetige Vektorfelder

$$V : \overline{G} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto V(x) = (V_1(x), \ldots, V_n(x)) \quad ,$$

die in G stetig differenzierbar sind. D.h. wir verlangen $V \in C(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Hierfür ist in G

$$\operatorname{div} V(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \qquad \text{(vgl. Ü zur Ana II)}$$

definiert.

<u>Integralsatz von Gauss:</u> Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Polyeder mit äußerem Einheitsnormalenvektorfeld $\nu \in C(\partial_r G, \mathbb{R}^n)$ und $V \in C(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Sind dann $\langle V, \nu \rangle$ über ∂G und $\operatorname{div} V$ über G integrierbar, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} V(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\partial G} \langle V(x), \nu(x) \rangle \, d\sigma(x).$$

Für den Beweis werden wir zusätzlich voraussetzen:

(i) Es gibt eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bar{G} \subset \Omega$ und $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

(ii) ∂G ist eine Hyperfläche, d.h. $\partial_r G = \partial G$.

Einen vollständigen Beweis des Satzes in der angegebenen Formulierung finden Sie in Abschnitt 20 des Buches "Analysis III" von Kaballo.

Ferner werden wir etwas Schreibarbeit sparen, indem wir unter den genannten Voraussetzungen an G für Funktionen $f \in C^1(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$

die Identität

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\partial G} f(x)\, \nu_i(x)\, d\sigma(x) \qquad (!)$$

zeigen. (Wählt man hierin $f = v_i$ und summiert, so hat man den Gauss'schen Satz.)

Wir beginnen mit einer einfachen Feststellung, die die Behauptung plausibel macht:

Bem.: Ist G wie im Gauss'schen Satz und $f \in C_c^1(G)$, so gilt $\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = 0$. $(i \in \{1, \dots, n\})$

Beweis: Sei $W = [-R, R]^n$ so groß, dass $G \subset W$, und $\tilde{f}$ die triviale Fortsetzung von f auf W. Dann ist

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_W \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x)$$

$$= \int_{[-R,R]^{n-1}} \left(\int_{-R}^{R} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_1(x_i) \right) d\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Als Hilfsmittel benötigen wir:

Lemma 1: Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I = (a, b)$, $\psi \in C^1(\Omega, I)$ und $f \in C^1(\Omega \times I)$. Dann gilt für $F(x) := \int_a^{\psi(x)} f(x,t)\, dt$, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\, dt + f(x, \psi(x)) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x).$$

Bew.: Es ist

$$\frac{1}{h}\left(F(x+he_i)-F(x)\right)=\frac{1}{h}\left(\int_a^{\psi(x+he_i)} f(x+he_i,t)\,dt-\int_a^{\psi(x)} f(x,t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{h}\int_{\psi(x)}^{\psi(x+he_i)} f(x+he_i,t)\,dt+\int_a^{\psi(x)}\frac{1}{h}\left(f(x+he_i,t)-f(x,t)\right)dt$$

$$=: I + II + III \quad \text{mit}$$

$$I=\frac{1}{h}\int_{\psi(x)}^{\psi(x+he_i)}\left(f(x+he_i,t)-f(x,t)\right)dt \longrightarrow 0 \quad (h\to 0)$$

$$II=\frac{1}{h}\int_{\psi(x)}^{\psi(x+he_i)} f(x,t)\,dt \longrightarrow f(x,\psi(x))\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) \quad (h\to 0)$$

(Hauptsatz + Kettenregel)

$$III=\int_a^{\psi(x)}\frac{1}{h}\left(f(x+he_i,t)-f(x,t)\right)dt \longrightarrow \int_a^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt \quad (h\to 0)$$

(Lebesgue) $\square$

Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen können wir in der lokalen Darstellung von ∂G, d.h.

$$\partial G\cap B_\varepsilon(x_0)=\{x\in B_\varepsilon(x_0) : F(x)=0\},$$

die Gleichung $F(x)=0$ nach einer der Komponenten, sagen wir o.E. nach x_n, auflösen, so dass mit einer C^1-Funktion ψ gilt

$$F(x)=0 \iff \psi(x')=x_n$$

für alle $x=(x',x_n)$ hinreichend nahe bei x_0.

Schränken wir noch weiter ein auf einen offenen Quader $Q = R \times (a,b)$ um x_0, erhalten wir

$$Q \cap \begin{matrix}\partial G\\ G\end{matrix} = \{x=(x',x_n)\in Q : x_n \begin{matrix}=\\ <\end{matrix} \psi(x')\}$$

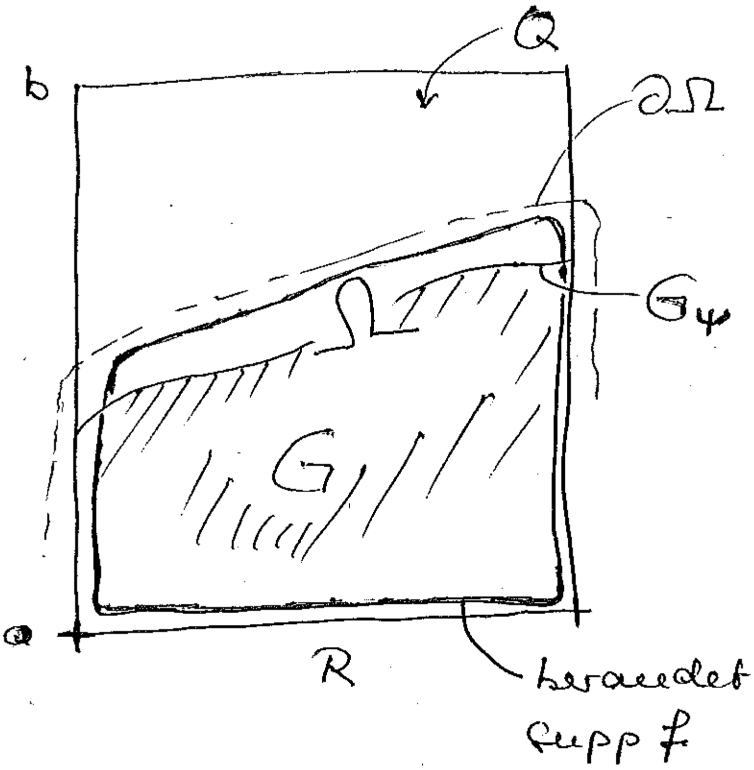
mit einer stetig differenzierbaren Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^{n-1} \supset R \longrightarrow (a,b), \quad x' \longmapsto \psi(x').$$

In dieser Situation gilt das folgende

Lemma 2: Es seien $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein offener Quader, $Q = R \times (a,b)$, $\psi \in C^1(R,(a,b))$ und $G = \{(x',x_n)\in Q : x_n < \psi(x')\}$ mit $\overline{G} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ferner sei $f \in C^1(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} f \subset Q$. Dann gilt

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\partial G \cap Q} f(x)\, \nu_i(x)\, d\sigma(x).$$



(Ich hoffe, die Skizze erleichtert das Verständnis der Voraussetzungen. — Besser ist, wenn Sie sich selbst eine anfertigen.)

Bew.: Der äußere Normaleneinheitsvektor $\nu(x)$ ist für $x = (x', x_n)$ mit $x_n = \psi(x')$ gegeben durch

$$\nu(x) = (1 + |\nabla' \psi(x')|^2)^{-\frac{1}{2}} (-\nabla' \psi(x'), 1)^T,$$

vgl. Bsp. (2) in Abschnitt 3.2. Für die Parametrisierung $\varphi(x') = (x', \psi(x'))$ gilt $g_\varphi(x') = 1 + |\nabla' \psi(x')|^2$.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

(1) $1 \le i \le n-1$:

$$\int_{\partial G \cap Q} f(x) \nu_i(x) \, d\sigma(x) = \int_R f(x) \cdot \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x')\right) \underbrace{\frac{\sqrt{g_\varphi(x')}}{(1+|\nabla'\psi(x')|^2)^{1/2}}}_{=1} \, d\lambda_{n-1}(x')$$

$$= -\int_R f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') \, d\lambda_{n-1}(x'), \text{ wobei } x_n = \psi(x').$$

Andererseits gilt nach Fubini

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, d\lambda_n(x) = \int_R \int_a^{\psi(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \, dx_n \, dx' \qquad \text{jetzt Lemma 1}$$

$$= \int_R \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{\psi(x')} f(x) \, dx_n\right) dx' - \int_R f(x', \psi(x')) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') \, dx',$$

wobei der zweite genau der gewünschte Term ist. Um einzusehen, dass der erste $= 0$ ist, setzen wir

$R' := \bigtimes_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n-1} (a_j, b_j)$, $dx'' := dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{n-1}$ und

$$x'(c) = (x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

Dann ist

$$\int_R \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{\psi(x')} f(x)\, dx_n \right) dx'$$

$$= \int_{R'} \left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{\psi(x')} f(x', x_n)\, dx_n \; dx_i \right) dx''$$

$$\overset{\text{Haupt-satz}}{=} \int_{R'} \left(\int_a^{\psi(x'(b_i))} \underbrace{f(x'(b_i), x_n)}_{=0} dx_n - \int_a^{\psi(x'(a_i))} \underbrace{f(x'(a_i), x_n)}_{=0} dx_n \right) dx' \; \ldots = 0$$

weil $(x'(b_i), x_n), (x'(a_i), x_n) \in \partial Q$ und $\operatorname{supp} f \subset Q$.

(2) $i = n$. Hier ist einerseits

$$\int_{\partial G \cap Q} f(x)\, \nu_n(x)\, d\sigma(x) = \int_R f(x', \psi(x'))\, d\lambda_{n-1}(x')$$

und andererseits

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_R \int_a^{\psi(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n \; d\lambda_{n-1}(x')$$

$$\overset{\text{Haupt-satz}}{=} \int_R f(x', \psi(x')) - \underbrace{f(\underset{\in \partial Q}{x', a})}_{=0} \; d\lambda_{n-1}(x'),$$

was offenbar übereinstimmt. □

Beweis des Integralsatzes unter den zusätzlichen Voraussetzungen (i) und (ii):

Wir konstruieren eine offene Überdeckung des kompakten $\overline{G}$, indem wir für jedes $x \in \overline{G}$ einen Quader Q_x mit $x \in Q_x$ wählen, so dass

(1) dieser für $x \in \partial G$ (nach Umnummerierung der Koordinaten) die Form wie in Lemma 2 hat,

(2) für $x \in G$ $\overline{Q}_x \subset G$ ist.

Da $\overline{G}$ kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_N$, so dass $\overline{G} \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_{x_k}$. Hierzu wählen wir Abschneidefunktionen $\chi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \chi_k \subset Q_{x_k}$, so dass für jedes $x \in \overline{G}$ gilt $\sum_{k=1}^{N} \chi_k(x) = 1$. (Eine solche Zerlegung nennt man eine Teilung der 1. Zu ihrer Konstruktion verwendet man Friedrichs-mollifier. Einzelheiten dazu in: Kaballo III, Satz 10.1.)

Nun sei $f \in C^1(\Omega)$, wobei $\overline{G} \subset \Omega$ (Vor. (i)). Wir setzen $f_k = \chi_k f$. Dann ist für $i \in \{1, \dots, n\}$

- $\int_G \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = 0$, wenn $\operatorname{supp} \chi_k \subset G$ (Lemma 1) (Bem. vor)

und

$$\int_G \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\, d\lambda_n(x) = \int_{\partial G} f_k(x)\, \nu_i(x)\, d\sigma(x)$$

für alle Indices $k \in \{1, \dots, N\}$ für die Q_k keinen Randpunkt enthält. Nun gilt für $x \in \overline{G}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_i}(x) \cdot f(x) + \chi_k(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{N} \chi_k(x)}_{\equiv 1 \text{ auf } \overline{G}} \Big) f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

$\square$

woraus die Beh. folgt.