3.2 Das k-dimensionale Flächenmaß

Es seien $1 \leq k \leq n-1$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist durch

$$\tau_M := \{ M \cap \Omega : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \}$$

ein System offener Teilmengen von M gegeben, die sog. Relativ- oder auch Spurtopologie. $\mathcal{B}(M) = \sigma(\tau_M)$ bezeichnet wie üblich die von τ_M erzeugte Borel-σ-Algebra auf M.

Ziel: Konstruktion eines k-dimensionalen Flächenmaßes $\quad \sigma_M : \mathcal{L}(M) \longrightarrow [0,\infty]$,

wobei $\mathcal{L}(M) \supset \mathcal{B}(M)$ eine σ-Algebra ist, die bezüglich σ_M vollständig ist. Wir erhalten $\mathcal{L}(M)$ aus dem Maßerweiterungssatz von Caratheodory als σ-Algebra der σ_M^*-messbaren Mengen, wenn wir σ_M auf einem geeigneten $\mathcal{B}(M)$ erzeugenden Semiring $\mathcal{S}_M$ so definieren, dass

$$\sigma_M|_{\mathcal{S}_M} : \mathcal{S}_M \longrightarrow [0,\infty]$$

ein Prämaß ist. — Soweit das Programm.

Los geht's mit weiteren Definitionen:

Def.: (1) Eine Teilmenge E einer k-dim. Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt klein, wenn sie im Definitionsbereich einer einzelnen Karte enthalten ist.

(2) $\mathcal{S}_M := \{ B \in \mathcal{B}(M) : B \text{ ist klein} \}$.

Bem.: $\mathcal{S}_M$ ist abgeschlossen unter $\cap$ und $\setminus$, also insbesondere ein Semiring.

Um das Prämaß σ_M für $B \in \mathcal{S}_M$ zu definieren, führen wir den Begriff der Gramschen Determinante ein:

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ diff-barenzierbar. Dann heißt

$$G_\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^{k \times k}, \; t \mapsto G_\varphi(t) := D\varphi(t)^T D\varphi(t)$$

die Gramsche Matrix und

$$g_\varphi : \Omega \to [0,\infty), \; t \mapsto g_\varphi(t) := \det G_\varphi(t)$$

die Gramsche Determinante von φ.

Bem. (1) Benannt nach dem dänischen Mathematiker Jørgen P. Gram (1850 - 1916), der auch für das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren und eine Reihendarstellung der Riemannschen Zetafunktion verantwortlich ist.

(2) Für jedes $t \in \Omega$ ist die Matrix $G_\varphi(t)$ reell, symmetrisch und wegen

$$\langle \xi, G_\varphi(t)\xi \rangle = \langle \xi, D\varphi(t)^T D\varphi(t)\xi \rangle = |D\varphi(t)\xi|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k$$

positiv semidefinit. Daher sind alle Eigenwerte von $G_\varphi(t)$ und damit auch die Determinante $g_\varphi(t) \geq 0$.

(3) Ist $A = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, so ist $\det(A^T A)^{\frac{1}{2}}$ das k-dimensionale Volumen des von $a_1, \dots, a_k$ aufgespannten Parallelepipeds (Spats) P_A.

(Um dies einzusehen, wählt man eine Orthonormalbasis $e_{k+1}, \dots, e_n$ des orthogonalen Komplements $\langle a_1, \dots, a_k \rangle^\perp$ des von $a_1, \dots, a_k$ erzeugten Untervektorraums $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ und ergänzt die Matrix A zu $\tilde{A} := (a_1, \dots, a_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$. Dann ist

$$\tilde{A}^T \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\langle a_i, a_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq k} & 0 \\ \hline 0 & \left(\langle e_i, e_j \rangle\right)_{k+1 \leq i,j \leq n} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A^T A & 0 \\ \hline 0 & E_{n-k} \end{array} \right),$$

und nach dem Kästchen- und Determinantenmultiplikationssatz also $|\det \tilde{A}| = \det(A^T A)^{\frac{1}{2}}$.

Nun ist $|\det \hat{A}|$ gerade das n-dimensionale Volumen
des von $a_1, \dots, a_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ erzeugten Spats, der nichts anderes ist, als das kartesische Produkt $P_A \times W$ mit einem $n-k$-dimensionalen Würfel W der Kantenlänge 1.)

Def.: Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : \Omega \to V \subset M$ eine Parametrisierung von V. Für $B \in \mathcal{S}_M$ mit $B \subset V$ setzen wir

$$\sigma_M(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{g_\varphi(t)}\, d\lambda_k(t).$$

Satz 1: Die Abbildung $\sigma_M : \mathcal{S}_M \to [0,\infty]$, $B \mapsto \sigma_M(B)$, ist ein wohldefiniertes Prämaß auf $\mathcal{S}_M$.

Bew.: (1) Wohldef.: Für $j \in \{1,2\}$ seien $\varphi_j : \mathbb{R}^k \supset \Omega_j \to V_j$ Parametrisierungen und $B \in \mathcal{S}_M$, $B \subset V_1 \cap V_2 =: V$. Wir setzen $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$, so dass $\varphi_j^{-1}(B) \subset W_j$.
Nach Lemma 1 im vorigen Abschnitt ist

$$\tau := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : W_2 \to W_1$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Die Kettenregel ergibt

$$D\varphi_2(t) = D\varphi_1(\tau(t)) \cdot D\tau(t),$$

und mit der Transformationsformel erhalten wir

$$\int_{\varphi_2^{-1}(B)} \sqrt{g_{\varphi_2}(t)}\, d\lambda_k(t) = \int_{\varphi_2^{-1}(B)} \det(D\varphi_2(t)^T D\varphi_2(t))^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_k(t)$$

$$= \int_{\varphi_2^{-1}(B)} \det(D\varphi_1(\tau(t))^T D\varphi_1(\tau(t)))^{\frac{1}{2}}\, |\det D\tau(t)|\, d\lambda_k(t)$$

$$\underset{\text{Trafo-formel}}{=} \int_{\tau(\varphi_2^{-1}(B))} \det(D\varphi_1(s)^T D\varphi_1(s))^{\frac{1}{2}}\, d\lambda_k(s) = \int_{\varphi_1^{-1}(B)} \sqrt{g_{\varphi_1}(s)}\, d\lambda_k(s).$$

Also ist $\sigma_M(B)$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

(2) $\sigma_M(\emptyset) = 0$ ist offensichtlich. Sind für $j \in \mathbb{N}$ $B_j \in \mathcal{S}_M$ paarweise disjunkt und $B = \sum_{j\in\mathbb{N}} B_j$, so ist

$$\sigma_M(B) = \int_\Omega \chi_{\varphi^{-1}(B)}(t) \sqrt{g_\varphi(t)}\, d\lambda_k(t)$$

und $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(\sum_{j\in\mathbb{N}} B_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}(B_j)$, so dass

$\chi_{\varphi^{-1}(B)} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{\varphi^{-1}(B_j)}$. Die Folgerung aus dem Satz von B. Levi erlaubt

$$\sigma_M(B) = \int_\Omega \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{\varphi^{-1}(B_j)}(t) \sqrt{g_\varphi(t)}\, d\lambda_k(t)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_\Omega \chi_{\varphi^{-1}(B_j)}(t) \sqrt{g_\varphi(t)}\, d\lambda_k(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_M(B_j).$$

$\square$

(Die Frage, ob $\mathcal{S}_M$ die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(M)$ erzeugt, stellen wir zunächst zurück und diskutieren zuerst einige...)

Bspe.:

(1) Ist $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Kurve, so dass $M := \varphi(I)$ eine 1-dim. Untermannigfaltigkeit ist, so haben wir

$$D\varphi(t) = \varphi'(t) = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\varphi_n}{dt}(t)\right)^T$$

und damit $g_\varphi(t) = |\varphi'(t)|^2$, so dass

$$\sigma_M(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(t)|\, dt.$$

(Hierbei können endlich viele Punkte ausgenommen werden, für die φ^{-1} unstetig oder $\varphi'(t) = 0$ ist.)

konkrete Frage dazu: Welche Bogenlänge hat eine Umdrehung der Schraubenlinie von S. 8 ?

(2) $M = G_f$ für eine C^1-Funktion $f: \mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega \to \mathbb{R}$, vgl. S. 9. Eine globale Parametrisierung ist hier

$$\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad x' \mapsto \varphi(x') = (x', f(x')).$$

Für deren Jacobi-Matrix haben wir bereits festgestellt, dass

$$D\varphi(x') = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ - & \nabla' f(x') & - \end{pmatrix}$$

mit $\nabla' f(x') = \dots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x')\right)$

Um $g_\varphi(x')$ zu berechnen, ergänzen wir $D\varphi(x')$

um eine n-te Spalte, in die wir den transponierten Normalenvektor

$$(\nabla F(x))^T = (-(-\nabla' f(x'))-, 1)^T \qquad (F(x) = x_n - f(x'))$$

schreiben. Das ergibt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} D\varphi(x') & (\nabla F(x))^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & (-\nabla' f(x'))^T \\ 0 & & 1 & \\ & \nabla' f(x') & & 1 \end{pmatrix},$$

für die

$$A^T A = \left(\begin{array}{c|c} D\varphi(x')^T D\varphi(x') & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \ \cdots \ 0 & |\nabla F(x)|^2 \end{array}\right),$$

wobei $|\nabla F(x)|^2 = 1 + |\nabla' f(x')|^2$. Dass in der letzten Zeile bzw. Spalte $n-1$ Nullen stehen, ergibt sich daraus, dass der Normalenvektor $\nabla F(x)$ orthogonal zum Tangentialraum, also zu den Spalten von $D\varphi(x')$ ist; das muss man nicht nachrechnen. Es folgt (Kästchensatz!)

$$g_\varphi(x') \cdot |\nabla F(x)|^2 = \det(A^T A) = \det(A)^2,$$

wobei $\det(A) = 1 + |\nabla' f(x')|^2 = |\nabla F(x)|^2$. (Die vorletzte Gleichung sieht man induktiv recht leicht ein, wenn man in der rechten unteren Ecke von A beginnt. Insgesamt

$$g_\varphi(x') = 1 + |\nabla' f(x')|^2$$

bzw.

$$\sigma_M(B) = \int_\Omega \chi_B(\varphi(x'))\sqrt{1+|\nabla' f(x')|^2}\, d\lambda_{n-1}(x').$$

(Hierbei ist $\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ möglich, so dass die "kleine" Menge B ziemlich groß gewählt werden kann.)

(3) Wählen wir in (2) speziell

$$\Omega = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'|^2 < R^2\} \quad \text{und}$$

$$\varphi_\pm(x') = (x', f_\pm(x')) \quad \text{mit} \quad f_\pm(x') = \pm\sqrt{R^2 - |x'|^2},$$

so erhalten wir globale Parametrisierungen der Hemisphären

$$S_R^\pm := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < R^2, \pm x_n > 0\}.$$

Nach (2) erhalten wir für die Gramsche Determinante $g_{\varphi_\pm}(x') = 1 + |\nabla' f_\pm(x')|^2$ mit $\nabla' f(x') = \frac{\mp x'}{\sqrt{R^2 - |x'|^2}}$,

also $g_{\varphi_\pm}(x') = \frac{R^2}{R^2 - |x'|^2}$, so dass

$$\sigma_{S_R^\pm}(B) = \int_{\varphi_\pm^{-1}(B)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - |x'|^2}}\, d\lambda_{n-1}(x').$$

Da der "Äquator" eine $(n-1)$-dimensionale

Nullmenge ist (Warum?), können wir das Hyperflächenmaß für Borelsche Teilmengen der gesamten Sphäre $S_R = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x|^2 = R^2\}$ angeben als

$$\sigma_{S_R}(B) = \int_{|x'|<R} \left(\chi_B(\varphi_+(x')) + \chi_B(\varphi_-(x'))\right) \frac{R}{\sqrt{R^2-|x'|^2}}\, d\lambda_{n-1}(x')$$

In drei Dimensionen ist die Verwendung der Winkelvariablen $(\varphi, \vartheta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ oft hilfreich (→ Übungen, Aufg. 47). Mit

$$(x, y, z) = R(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta) =: \Psi(\varphi, \vartheta)$$

(wobei R jetzt fest ist) erhält man

$$D_\Psi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \sin\vartheta & R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi \sin\vartheta & R\sin\varphi\cos\vartheta \\ 0 & -R\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

$$G_\Psi(\varphi, \vartheta) = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_\Psi(\varphi, \vartheta) = R^4 \sin^2\vartheta$$

und weiter für eine Borelmenge $B \subset S_R \subset \mathbb{R}^3$!

$$\sigma_{S_R}(B) = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_B(R(\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta))\, d\varphi\, \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Gehen wir noch einmal zurück zum n-dimensionalen Fall: Da jede Borelmenge $B \subset S_R$ disjunkt zerlegt werden kann in

$$B = (B \cap S_R^+) + (B \cap S_R^-) + N,$$

wobei N der Durchschnitt von B mit dem "Äquator" und also eine $(n-1)$-dimensionale Nullmenge ist, wird durch die Gleichung

$$\sigma_{S_R}(B) = \int_{|x'|<R} \left(\chi_B(\varphi_+(x')) + \chi_B(\varphi_-(x'))\right) \frac{R}{\sqrt{R^2-|x'|^2}} \, d\lambda_{n-1}(x')$$

(s. S. 22 oben) bereits ein Maß

$$\sigma_{S_R} : \mathbb{B}(S_R) \longrightarrow [0,\infty]$$

definiert, nach dem in der üblichen Weise integriert werden kann. Da S_R kompakt ist, ist insbesondere jede stetige Funktion $g: S_R \to \mathbb{R}$ nach σ_{S_R} integrierbar, und mit r anstelle von R gilt

$$\int g(x)\, d\sigma_{S_r}(x) = \int_{|x'|<r} \left(g(x', \sqrt{1-|x'|^2}) + g(x', -\sqrt{1-|x'|^2})\right) \frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}} \, d\lambda_{n-1}(x')$$

$$= r^{n-1} \cdot \int_{|\xi'|<1} \left(g(r\xi', r\sqrt{1-|\xi'|^2}) + g(r\xi', -r\sqrt{1-|\xi'|^2})\right) \frac{1}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} \, d\lambda_{n-1}(\xi'),$$

wobei im letzten Schritt die Transformation $x' = r\xi'$ benutzt wurde. Setzen wir dies in die Darstellung des Integrals in n-dimensionalen Kugelkoordinaten (Abschnitt 2.5.3, S. 112) ein, so erhalten wir für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ die Identität

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f(x)\, d\sigma_{S_r}(x) \right) d\lambda_1(r)}$$

Da $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ ist, gilt diese Formel sogar für alle Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Der Satz von Fubini ergibt dann, dass die Hyperflächenintegrale auf der rechten Seite für λ_1-fast alle $r>0$ existieren.

Damit ist die Diskussion der Beispiele abgeschlossen. Als nächstes zeigen wir, dass für eine beliebige Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ der Semiring $\mathcal{S}_M$ der "kleinen" Borelmengen die σ-Algebra $\mathcal{B}(M)$ erzeugt.

Lemma 1: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Mfkt. Dann ist M separabel, d.h. M besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge.

Bew.: $\mathbb{Q}^n$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zu $q \in \mathbb{Q}^n$ und $j \in \mathbb{N}$ wählen wir $y_{q,j} \in B_{\frac{1}{j}}(q) \cap M$, sofern dieser Durchschnitt nicht leer ist. Dann ist die Menge

$$M_d := \{ y_{q,j} : B_{\frac{1}{j}}(p) \cap M \neq \emptyset \}$$

höchstens abzählbar.

Nun seien $x \in M$ und $j_0 \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann existiert dazu ein $q_x \in \mathbb{Q}^n$ mit $|q_x - x| < \frac{1}{2j_0}$, sodass insbesondere $B_{\frac{1}{2j_0}}(q_x) \cap M \neq \emptyset$. Für das zugehörige $y_{q_x, 2j_0} \in M_d$ gilt dann $|y_{q_x,2j_0} - x| \leq |y_{q_x,2j_0} - q_x| + |q_x - x| < \frac{1}{2j_0} + \frac{1}{2j_0} = \frac{1}{j_0}$. Also ist M_d eine dichte Teilmenge von M. $\square$

Satz 2: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit. Dann besitzt M einen Atlas mit höchstens abzählbar vielen Karten.

Bew.: Wenn es eine Karte gibt, die auf M definiert ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls sei $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von M. Dann gibt es

$\forall j \in \mathbb{N}$ eine Karte $\varphi_j : M \supset V_j \to \Omega_j \subset \mathbb{R}^k$, ($V_j$ offen)

und ein ~~Kreisradius~~ $r_j > 0$, so, dass

(i) $B_{r_j}(y_j) \cap M \subset V_j$

(ii) Es gibt keine Karte, deren Definitionsbereich $B_{2r_j}(y_j) \cap M$ enthält.

Wir zeigen, dass $\{\varphi_j : j \in \mathbb{N}\}$ ein Atlas von M ist:

Dazu sei $x \in M$ vorgegeben. Dann existiert eine Karte

$$\varphi : M \supset V \to \mathbb{R}^k \quad \text{und} \quad x \in V.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x) \cap M \subset V$. Dann existiert ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $|x - y_j| < \frac{\varepsilon}{3}$, was $B_{\frac{2\varepsilon}{3}}(y_j) \subset B_\varepsilon(x)$ nach sich zieht. Nach (ii) ist dann $r_j > \frac{\varepsilon}{3}$, so dass $x \in B_{r_j}(y_j) \cap M \subset V_j$. □

Bem.: Ist M kompakt, so gibt es einen Atlas von M mit endlich vielen Karten. Die Definitionsbereiche der Karten liefern nämlich eine (relativ) offene Überdeckung von M, aus der eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann.

Satz 2 ergibt, dass sich jede k-dim. Mfkt. M als abzählbare Vereinigung von kleinen Borelmengen darstellen lässt. Damit ist $\sigma(\mathcal{S}_M) = \mathfrak{B}(M)$.
Nun steht uns mit

$$\sigma_M^*(A) := \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_M(B_j) : A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j,\ B_j \in \mathcal{S}_M\Big\}$$

ein äußeres Maß $\sigma_M^* : \mathcal{P}(M) \to [0,\infty]$ zur Verfügung, und dem wir die Maßfortsetzung nach

Caratheodory durchführen können. Wir setzen:

$\mathcal{L}(M) :=$ σ-Algebra der σ_M^*-messbaren Mengen.

Dann ist $\mathcal{B}(M) \subset \mathcal{L}(M)$ und $\sigma_M : \mathcal{L}(M) \to [0,\infty]$ ein vollständiges Maß.

Wie man danach integriert, ist <u>prinzipiell</u> klar, weil das Integral nach einem Maß allgemein erklärt ist. Bei der "praktischen" Durchführung kann man so vorgehen, wie wir es bei der Integration über die Sphäre getan haben, d.h. man wählt geeignete k-dimensionale Nullmengen aus, auf deren Parametrisierung man verzichtet, so dass der Rest sich disjunkt in Definitionsbereiche von Karten zerlegen lässt. Um dies zu rechtfertigen, zeigen wir:

<u>Lemma</u> 2: Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $N \subset M$ ist genau dann eine k-dimensionale Nullmenge, wenn $\sigma_M(N) = 0$ ist.

<u>Bew.</u>: O.E. können wir annehmen, dass N im Definitionsbereich einer einzelnen Karte

$$\psi : M \supset V \xrightarrow{\sim} \Omega \subset \mathbb{R}^k$$

enthalten ist. Die Umkehrabb. sei $\varphi : \Omega \to V$, sodass

$$\sigma_\mu(N) = \int_\Omega \chi_N(\varphi(t)) \sqrt{g_\varphi(t)}\, d\lambda_k(t)$$

(1) Ist $\sigma_\mu(N)=0$, so ist $\chi_N(\varphi(t))\sqrt{g_\varphi(t)}=0$ λ_k-f.ü., also $\chi_N(\varphi(t))=0$ λ_k-f.ü.. Mit $N_k := \varphi^{-1}(N) \in \mathcal{L}_k$ existiert eine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^k$, so dass $\varphi(N_k)=N$. Da $\varphi \in C^1(\Omega)$ ist, ist φ auch lokal Lipschitzstetig, und damit ist N eine k-dim. Nullmenge.

(2) Nun sei N eine k-dim. Nullmenge, d.h. es gibt $N_k \in \mathcal{L}_k$ mit $\lambda_k(N_k)$ und eine lokal Lipschitzstetige Funktion $f: N_k \to \mathbb{R}^n$ mit $N \subset f(N_k)$. Nehmen wir nun $\sigma_\mu(N) > 0$ an, so ist $\lambda_k^*(\psi(N)) > 0$ und damit auch $\lambda_k^*(\psi(f(N_k) \cap V)) > 0$. Das ist ein Widerspruch, wenn wir zeigen können, dass

(3) Karten lokal Lipschitzstetig sind.

Dazu nehmen wir an, ψ wie oben sei nicht lokal Lipschitz. Dann gibt es eine kompakte $K \subset V$, so dass

$$\sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \inf_{\substack{s,t\in\psi(K)\\ s\neq t}} \frac{|\varphi(s)-\varphi(t)|}{|t-s|} = 0$$

Da φ stetig ist, ist auch $\varphi(K)$ kompakt. Daher gibt es ein $t \in \varphi(K)$ und eine Folge $(t_n)_n$ in $\varphi(K)$ mit $t_n \to t$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\varphi(t_n)-\varphi(t)|}{|t_n-t|} = 0$. Nun ist

$$\varphi(t_n)-\varphi(t) = D\varphi(t)(t_n-t) + r(t_n-t)$$

mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r(t_n-t)}{|t_n-t|} = 0$ und daher haben wir

ggf. Übergang zu einer TF

$$0 = \lim_{n\to\infty} D\varphi(t)\cdot\frac{t_n-t}{|t_n-t|} = D\varphi(t)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{t_n-t}{|t_n-t|}.$$

D.h. $D\varphi(t)$ ist nicht injektiv, ein Widerspruch zu $\operatorname{Rang} D\varphi(t) = k$. $\square$

Mit dieser Überlegung ist dann auch die folgende Festsetzung sinnvoll:

Def.: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale glatte Fläche und $M := S_{r,k} \subset S$ die Untermfkt. der regulären Punkte der Dimension k von S. Dann ist

$$\mathcal{L}(S) := \{A \subset S : A \cap M \in \mathcal{L}(M)\}$$

eine σ-Algebra und

$$\sigma_S : \mathcal{L}(S) \to [0,\infty],\ A \mapsto \sigma_S(A) := \sigma_M(A\cap M)$$

ein Maß, welches σ_M fortsetzt.

Für das Integral nach σ_S gilt nun die folgende handliche Darstellung:

Satz 2: Es seien

- $S \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. glatte Fläche und $M := S_{r,k} \subset S$ die Untermfkt. der regulären Punkte der Dimension k von S;
- $\{\varphi_j^{-1} = \psi_j : M \supset V_j \to \Omega_j \subset \mathbb{R}^k\}$ ein Atlas von M;
- $N \subset M$ eine k-dim. Nullmenge und $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von $M \setminus N$ mit $V_j \supset W_j \in \mathcal{L}(M)$ und schließlich
- $f \in \mathcal{L}^1(S, \mathcal{L}(S), \sigma_S)$. Dann gilt

$$\int_S f \, d\sigma_S = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\psi_j(W_j)} f(\varphi_j(t)) \sqrt{g_{\varphi_j}(t)} \, d\lambda_k(t).$$

Bew.: Auf beiden Seiten wird nach einem Maß integriert, das per Konstruktion auf

$$\mathcal{S} := \{A \subset S : A \cap M \in \mathcal{S}_M\}$$

übereinstimmen. Da $\sigma_S|_{\mathcal{S}}$ σ-endlich ist, sind beide Maße identisch und also auch die Integrale nach diesen Maßen. $\square$