Kap. 3: Integration über k-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ $(k<n)$

3.1 Untermannigfaltigkeiten und k-Flächen

Es seien $n\in\mathbb{N}$ die Raumdimension und $k\in\{1,\dots,n-1\}$

Def.: Eine Teilmenge $M\subset\mathbb{R}^n$ heißt eine <u>k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$</u>, wenn es zu jedem $x_0\in M$ eine offene Umgebung $U\subset\mathbb{R}^n$ von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $F: U\to\mathbb{R}^{n-k}$ gibt, so dass

(1) $M\cap U=\{x\in U: F(x)=0\}$,

(2) $\operatorname{Rang} DF(x_0)=n-k$.

Bem.: (1) Sind die Abbildungen F in dieser Def. $\alpha\geq 1$-mal stetig differenzierbar, so heißt M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^α. (Untermannigfaltigkeit = U. der Klasse C^1.) Für die Integration über solche „Flächen" ist die höhere Regularität jedoch nicht von Belang.

(2) Für $k=n-1$ spricht man von einer <u>Hyperfläche</u> (der Klasse C^α).

(3) Die Jacobi-Matrix $DF(x_0)$ hat die Gestalt

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \text{—} & \nabla F_1(x_0) & \text{—} \\ & \vdots & \\ \text{—} & \nabla F_{n-k}(x_0) & \text{—} \end{pmatrix},$$

ihre Zeilen $\nabla F_i(x_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(x_0)\right)$ sind die Gradienten der Komponentenfunktionen $F_1, \ldots, F_{n-k}$. Es ist also eine $(n-k)\times n$-Matrix. Die Bedingung (2) ist äquivalent zu jeder der folgenden Aussagen:

(i) $DF(x_0)$ hat maximalen Rang.

(ii) Die $n-k$ Zeilen $\nabla F_i(x_0)$ von $DF(x_0)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$.

(iii) Die lineare Abbildung $DF(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$, $x \mapsto DF(x_0)x$, ist surjektiv.

(iv) Es gibt eine $(n-k)\times(n-k)$-Unterdeterminante von $DF(x_0)$, die $\neq 0$ ist.

(4) Der Kern der linearen Abbildung $DF(x_0)$ wird der <u>Tangentialraum an M</u> <u>in x_0</u> genannt und mit <u>$T_{x_0}(M)$</u> bezeichnet. Es handelt sich um einen k-dimensionalen Untervektor-

raum des $\mathbb{R}^n$. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren (an M in x_0). Diese Bezeichnung ist sinnvoll, denn:

Ist $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $\varphi((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset M \cap U$ und $\varphi(0) = x_0$, so ist $F(\varphi(t)) = 0$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ und die Kettenregel ergibt

$$0 = \left(\frac{d}{dt} F \circ \varphi\right)(0) = DF(x_0) \cdot \varphi'(0).$$

(5) Das orthogonale Komplement des Tangentialraumes $T_{x_0}(M)$ im $\mathbb{R}^n$ heißt der Normalenraum an M in x_0. Er hat die Dimension $n-k$ und wird von den Zeilen von $DF(x_0)$ aufgespannt. Seine Elemente heißen *Normalenvektoren (an M in x_0)*.

Um das Integral über ein solches $M \subset \mathbb{R}^n$ zu erklären, benötigen wir eine Darstellung von M mit Hilfe lokaler Parametrisierungen

$$\varphi : \mathbb{R}^k \supset \Omega \longrightarrow M \qquad (\Omega \text{ offen}).$$

Dieser Begriff bedarf der genaueren Erklärung. Dazu einige

Definitionen:

(1) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt *offen in A* (oder auch: *offen relativ A*), wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$B_\varepsilon(x_0) \cap A = \{x \in A : |x - x_0| < \varepsilon\} \subset U.$$

(2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig diff.'bar. Falls Rang $D\varphi(x) = k$ ist für alle $x \in \Omega$, so heißt φ eine *Immersion* (der Klasse C^α, falls φ α-mal stetig diff.'bar ist).

(3) Eine Immersion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt eine *Parametrisierung* von $V := \varphi(\Omega)$, wenn φ Ω homöomorph auf V abbildet, d.h. wenn $\varphi : \Omega \to V$ bijektiv und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : V \to \Omega$ stetig ist. In diesem Fall heißt φ^{-1} eine *Karte* von V.

Mit diesen Begriffen ausgestattet, können wir den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch eine äquivalente Eigenschaft charakterisieren:

Satz 1: Genau dann ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine in M offene Umgebung $V \subset M$, eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ und eine Parametrisierung $\varphi : \Omega \to V$ gibt.

Bem.: (1) Der Beweis dieses Satzes ist für die verbleibende Zeit zu umfangreich. Das wesentliche Argument ist der Satz über implizite Funktionen, der die lokale Auflösung der Gleichung $F(x)=0$ (in der Def.) nach $n-k$ der n Variablen erlaubt. Für den Bew. und eine weitere äquivalente Formulierung des Begriffs (lokale Darstellbarkeit als Graph einer C^1- (bzw. C^α-) Funktion) sei auf Kaballo II, Abschnitt 23, verwiesen.

(2) Eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten von M, deren Definitionsbereiche M vollständig überdecken, wird als ein <u>Atlas</u> von M bezeichnet.

(3) Sei $\varphi : \Omega \to V \subset M$ eine lokale Parametrisierung von M mit $t_0 \in \Omega$ und $\varphi(t_0) = x_0 \in V$. Bereits gesehen haben wir, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t_0)$ $(1 \leq j \leq k)$ im Tangentialraum $T_{x_0}(M)$ liegen. Dieser ist k-dimensional, und aufgrund der Definition einer

Immersion ist Rang $D\varphi(t_0) = k$. Daher sind die $\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t_0)$ $(1 \le j \le k)$ eine Basis von $T_{x_0}(M)$.

<u>Lemma</u> 1 (Parameter-Transformation) Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. Mannigfaltigkeit und

$$\varphi^{(j)} : \mathbb{R}^k \supset \Omega_j \longrightarrow V_j \subset M \quad (j = 1,2)$$

zwei Parametrisierungen, so dass $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ ist. Dann sind $W_j := (\varphi^{(j)})^{-1}(V) \subset \Omega_j$ offen

und $$\tau := (\varphi^{(1)})^{-1} \circ \varphi^{(2)} : W_2 \longrightarrow W_1$$

ein C^1-Diffeomorphismus.

<u>Bew.</u>: Die Offenheit der W_j folgt aus der Stetigkeit der $\varphi^{(j)}$. Ferner sind die $\varphi^{(j)}$ Homöomorphismen, ebenso ihre im Lemma betrachteten Restriktionen, so dass auch τ homöomorph ist. Bleibt nur die stetige Diff.'barkeit von τ in einem (beliebigen) Punkt $t^{(2)} \in W_2$ zu zeigen. (Zwangsläufig liefert dasselbe Argument die Aussage $\tau^{-1} \in C^1(W_1, W_2)$.) Dazu sei $t^{(1)} := \tau^{-1}(t^{(2)})$. Da $\varphi^{(1)} : W_1 \to V$ eine Immersion ist, gilt Rang $D\varphi^{(1)}(t^{(1)}) = k$. Also existieren Indizes $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, so dass

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{i_m}}{\partial t_j}(t^{(1)})\right)_{1\le m,j\le k} \neq 0 .$$

Wir definieren Abbildungen

$$\psi^{(j)}: W_j \longrightarrow \mathbb{R}^k,\quad t \longmapsto \psi^{(j)}(t) := \left(\varphi^{(j)}_{i_1}(t), \dots \varphi^{(j)}_{i_k}(t)\right).$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen existieren Umgebungen $U_1 \subset W_1$ von $t^{(1)}$ und $U \subset \psi^{(1)}(W_1)$ von $\psi^{(1)}(t^{(1)})$, so dass

$$\psi^{(1)}\big|_{U_1} : U_1 \to U$$

eine stetig diff.bare Inverse $(\psi^{(1)})^{-1} : U \to U_1$ hat. Setzen wir noch $U_2 := (\psi^{(2)})^{-1}(U)$, so ist

$$(\psi^{(1)})^{-1} \circ \psi^{(2)} : U_2 \to U_1$$

stetig diffbar und stimmt auf U_2 mit $\tau = (\varphi^{(1)})^{-1} \circ \varphi^{(2)}$ überein. □

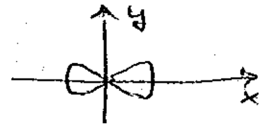
<u>Beispiele</u>: (1) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ injektiv, stetig diffbar mit $\varphi'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. <u>Wenn</u> zudem $\varphi^{-1} : \varphi(I) \to I$ stetig ist, so ist $M := \varphi(I)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : I \to M$ eine globale Parametrisierung von M. Ein einfaches Beispiel ist die Schraubenlinie.

$S_c := \{\varphi(t)\in\mathbb{R}^3 : t\in\mathbb{R}\}$ mit der Parametrisierung

$$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto \varphi(t):=(\cos(t),\sin(t),ct) \qquad (c\neq 0).$$

Die Inverse ist $\varphi^{-1}: S_c\to\mathbb{R},\ (x,y,z)\mapsto\varphi^{-1}(x,y,z)=\frac{z}{c}$, deren Stetigkeit offensichtlich ist.

Ein schönes Bsp. dafür, dass φ^{-1} nicht "automatisch" stetig ist (oder es überall lokale stetige Umkehrabbildungen gibt), ist die Lemniskate (= "liegende Acht") des Gerono



$$L_G := \{(\sin(t),\sin(2t))\in\mathbb{R}^2 : 0<t<2\pi\}.$$

Hier ist $\varphi:(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto\varphi(t)=(\sin(t),\sin(2t))$ zwar injektiv, auch gilt stets, dass

$$\varphi'(t)=(\cos(t),2\cos(2t))\neq 0,$$

aber in keiner noch so kleinen Umgebung des Nullpunkts $(0,0)=\varphi(\pi)$ gibt es eine stetige Inverse. (Natürlich hat L_G eine wohldefinierte Länge. Bereits dieses einfache Bsp. zeigt, dass die Begriffsbildungen hier keineswegs optimal den Erfordernissen der Maßtheorie angepasst sind!)

(2) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig diff.-bar. Dann ist der Graph

$$G_f := \{(x', f(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Omega\}$$

eine $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, denn wir können G_f sogar global darstellen als

$$G_f = \{x = (x', x_n) \in \Omega \times \mathbb{R} : F(x) = 0\}$$

mit $F(x) = F(x', x_n) = x_n - f(x')$, wobei

$$DF(x) = \nabla F(x) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x'), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x'), 1\right) \neq 0,$$

d.h. wir haben Rang $DF(x) = 1 \quad \forall\, x \in G_f$. Der Normalenraum an G_f in einem Punkt $x_0 \in G_f$ ist gegeben durch

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda \nabla F(x_0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Orthogonal dazu ist der Tangentialraum $T_{x_0}(G_f)$, zu dessen Bestimmung wir die in diesem Fall ebenfalls globale Parametrisierung

$$G_f = \{\varphi(x') \in \mathbb{R}^n : x' \in \Omega\}$$

mit $\varphi : \Omega \to G_f$, $x' \mapsto \varphi(x') := (x', f(x'))$ heranziehen. Eine Basis von $T_{x_0}(G_f)$ ist gegeben durch die Spalten der Jacobi-Matrix

$$D\varphi(x_0') = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla' f(x_0') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0') & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0') & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_0') \end{pmatrix},$$

wobei $x_0 = (x_0', f(x_0'))$ und $\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$.

<u>Verständnisfrage</u>: Wie sind die Ausführungen in Bsp. (2) zu modifizieren, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-k}$ offen, $f: \Omega \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar und $G_f = \{(x', f(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in \Omega\}$ ist?

(3) Noch ein etwas konkreteres Bsp.: Die Sphäre

$$S_R := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = R^2\}$$

vom Radius $R > 0$ ist unschwer als $(n-1)$-dimensionale U.-Mfkt. des $\mathbb{R}^n$ zu erkennen, da sie global als Nullstellenmenge der Funktion

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = |x|^2 - R^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - R^2$$

definiert ist. Normalenvektoren an S_R in $x_0 \in S_R$ sind die Vielfachen von $\nabla F(x_0) = 2x_0$. Üblich ist die Normierung zu $\nu(x_0) = \frac{x_0}{R}$, das ist der <u>äußere</u> Normaleneinheitsvektor in Bezug auf die von S_R berandete Kugel $B_R(0)$. Eine globale Parametrisierung ist nicht möglich, aber die "nördliche" und "südliche Hemisphäre" können wir (ähnlich wie bei den n-dim. Kugelkoordinaten, allerdings bei festem Radius R) als Graphen von

$f_\pm : \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < R\} \to \mathbb{R}$, $x' \longmapsto f_\pm(x') := \pm\sqrt{R^2 - |x'|^2}$

darstellen und erhalten die Parametrisierungen

$\varphi_\pm(x') := (x', \pm\sqrt{R^2-|x'|^2})$ mit

$$D\varphi_\pm(x') = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \nabla' f_\pm(x') \end{pmatrix},$$

wobei $\nabla' f_\pm(x') = \dfrac{\mp x'}{\sqrt{R^2-|x'|^2}}$, woraus eine Basis des Tangentialraumes abgelesen werden kann.

Karten der Hemisphären $S_R^\pm := \{x \in S_R : \pm x_n > 0\}$ sind gerade die Projektionen $(\varphi^\pm)^{-1} : S_R^\pm \to \{|x'| < R\}$, $x = (x', x_n) \longmapsto (\varphi^\pm)^{-1}(x) = x'$. Lediglich die Äquatorebene" $\{x = (x', x_n) \in S_R : x_n = 0\}$ ist bislang nicht durch die beiden Karten abgedeckt. Um einen vollständigen Atlas von S_R zu erhalten, führt man die bisherigen Überlegungen auch für die anderen Koordinatenachsen durch und erhält insgesamt $2n$ Karten, deren Definitionsbereiche S_R ganz überdecken.

In drei Dimensionen ist oft die Verwendung der Winkelvariablen φ und ϑ zweckmäßig. Auch diese liefern keine vollständige Parametrisierung von S_R, aber es fehlt nur der Meridieser zum Längengrad $\varphi = 0$ einschließlich der Pole. Genauer: Sei

$$S_R' := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=R^2\} \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

Dann ist

$$\psi : (0,2\pi) \times (0,\pi) \longrightarrow S_R', \quad (\varphi,\vartheta) \longmapsto \psi(\varphi,\vartheta) \quad \text{mit}$$

$$\psi(\varphi,\vartheta) := R(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

eine globale Parametrisierung von S_R'. (Beweis als Übungsaufgabe)

(4) Ein weiteres Bsp., als Aufgabe formuliert: Zeigen Sie, dass der Kegel

$$C = \{x = (x', x_4) \in \mathbb{R}^4 : |x'|^2 = x_4^2\}$$

keine (n-1)-dim. U.-Mfkt. des $\mathbb{R}^4$ ist! Welche (möglichst kleine!) Teilmenge müssen Sie aus C entfernen, um eine solche zu erhalten? Bestimmen Sie die Normalen an $C \setminus \{??\}$, geeignete Parametrisierungen und den Tangentialraum $T_{x_0}(C \setminus \{??\})$!

Diese Beispiele lassen es wünschenswert erscheinen, k-dimensionale Nullmengen (Ecken, Kanten, den Äquator u.ä.) von einer k-dim. Fläche auszunehmen, um so

- eine Untermannigfaltigkeit zu erhalten oder
- die Fläche in abzählbar viele disjunkte Definitionsbereiche von Karten + Nullmenge zu zerlegen.

Def. Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine <u>k-dimensionale Nullmenge</u>, wenn es eine Menge $N_k \in \mathcal{L}_k$ mit $\lambda_k(N_k) = 0$ und eine lokal Lipschitzstetige Funktion $f: \mathbb{R}^k \supset N_k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $N \subset f(N_k)$.

(<u>Lokal</u> Lipschitz-stetig bedeutet, dass die Einschränkung von f auf $N_k \cap K$ für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^k$ Lipschitz-stetig ist.)

Def.: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

(1) $x_0 \in S$ heißt C^1-regulärer Punkt der Dimension k, wenn es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 gibt, so dass $S \cap U$ eine k-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. Die Menge dieser regulären Punkte von S sei mit $S_{r,k}$ bezeichnet.

(2) S heißt eine k-dimensionale glatte ($/C^1$) Fläche, wenn $S_{r,k}$ in S dicht und $S \setminus S_{r,k}$ eine k-dimensionale Nullmenge ist.

Bem.: $S_{r,k}$ ist eine k-dim. UMfkt. des $\mathbb{R}^n$.