Stets sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt $\mathcal{A}$-messbar, μ-integrierbar, ..., wenn dies für $\operatorname{Re} f: X \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f: X \to \mathbb{R}$ zutrifft. Das μ-Integral für komplexwertige Funktionen ist in naheliegender Weise erklärt durch

$$\mu[f] := \mu[\operatorname{Re} f] + i\mu[\operatorname{Im} f].$$

Def.: Für eine reelle Zahl $p \geq 1$ seien

$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f: X \to \mathbb{C} : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar} \wedge \mu[|f|^p] < \infty\}$$

und, für $f \in \mathcal{L}^p$, $\|f\|_p := \mu[|f|^p]^{\frac{1}{p}}$.

Ferner definieren wir

$$\mathcal{L}^\infty := \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) := \{f: X \to \mathbb{C} : f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar} \wedge \|f\|_\infty < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_\infty := \inf\{C > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$

Bem.: $\|f\|_\infty$ wird als das essentielle Supremum von f bezeichnet, kurz: $\|f\|_\infty =: \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : x \in X\}$. Es ist $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ-f.ü., auf einer μ-Nullmenge kann f jedoch größere Werte annehmen.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass es sich bei $\| \ \|_p$ um eine Halbnorm handelt. Die Eigenschaften

$$\|f\|_p \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$$

sind für $1 \leq p \leq \infty$ offensichtlich. Ferner haben wir

$$\|f\|_p = 0 \iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0.$$

Sofern es in $\mathcal{A}$ also μ-Nullmengen $\neq \emptyset$ gibt, handelt es sich bei ~~Nor~~ $\| \ \|_p$ nicht um eine Norm. Aus

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

folgt mit der Monotonie des Integrals, dass $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$, also die Dreiecksungleichung für $\| \ \|_1$. Ferner haben wir für $f, g \in \mathcal{L}^\infty$:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \mu\text{-f.ü.}$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$$

$$\Rightarrow \inf\{C > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > C\}) = 0\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Der Beweis der Dreiecksungleichung für $1 < p < \infty$ ist etwas aufwendiger:

<u>Lemma</u> 1 (Youngsche Ungleichung): Es seien $a, b > 0$, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} .$$

Bew.: $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav ($\ln''(x) < 0$!) und daher $\ln(ab) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{p'}\ln(b^{p'}) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right)$. Da aber ln monoton steigt, folgt die Beh. ◻

Satz 1 (Höldersche Ungleichung): Es seien $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $f \in \mathcal{L}^p$ sowie $g \in \mathcal{L}^{p'}$. Dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Bew.: Das ist klar für $p = 1$ ($\Rightarrow p' = \infty$) und wenn $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_{p'} = 0$ ist. Also können wir von $1 < p < \infty$ und $\|f\|_p > 0 \wedge \|g\|_{p'} > 0$ ausgehen. Nehmen wir zuerst $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$ an. Dann ist

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \, d\mu \underset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p}\int |f|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int |g|^{p'} d\mu = 1.$$

Wendet man dies an auf $\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$ und $\tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_{p'}}$, so folgt $\left\| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_{p'}} \right\|_1 \leq 1$. Aufgrund der Homogenität von $\| \ \|_1$ also $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. ◻

Folgerungen

(1) Für $p = 2$ ist auch $p' = 2$ und wir erhalten die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das Halbskalarprodukt $\langle f, g \rangle_\mu := \int f \bar{g} \, d\mu$.

(2) Sind $1 \le p < \infty$ und, für $1 \le i \le n$, $p_i \ge p$ mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p}$ sowie $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}$, so gilt

$$\| \prod_{i=1}^{n} f_i \|_p \le \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|_{p_i} .$$

(3) Sind $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, $\theta \in (0,1)$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$ und $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^p$ und es gilt die Lyapunovsche Ungleichung

$$\| f \|_p \le \| f \|_{p_1}^{1-\theta} \| f \|_{p_2}^{\theta} .$$

(4) Ist μ ein endliches Maß und $q > p$, so gilt $\mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$, und für alle $f \in \mathcal{L}^q$ ist

$$\| f \|_p \le \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| f \|_q .$$

(Beweise als Übungsaufgaben.)

Satz 2 (Minkowskische Ungleichung = Dreiecksungleichung für p-Halbnormen): Für $1 < p < \infty$ seien $f, g \in \mathcal{L}^p$. Dann ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p$ und es gilt

$$\| f + g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p$$

Bew.: Wegen $|f+g|^p \le (|f| + |g|)^p \le 2^p (|f|^p + |g|^p)$ gilt die Implikation $f, g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^p$.

Nun haben wir

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g|\,d\mu \le \int |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu + \int |f+g|^{p-1}|g|\,d\mu$$

$$\le \| |f+g|^{p-1} \|_{p'} \, (\|f\|_p + \|g\|_{p'}) \quad (\text{laut } \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{p'}=1),$$

wobei $\| |f+g|^{p-1} \|_{p'} = \|f+g\|_{p'(p-1)}^{p-1} = \|f+g\|_p^{p-1}$,

letzteres, weil $\frac{1}{p'(p-1)} = (1-\frac{1}{p})\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{p-1}{p}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{p}$.

Also: $\|f+g\|_p^p \le \|f+g\|_p^{p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$. Dividieren durch $\|f+g\|_p^{p-1} < \infty$ ergibt die Beh. □

Folgerung/Def.: Für $1 \le p \le \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\|\ \|_p : \mathcal{L}^p \to [0,\infty)$ eine Halbnorm.

Es gilt

$$\|f\|_p = 0 \iff \mu(\{x\in X : f(x) \neq 0\}) = 0.$$

Wir setzen $N := \{f : X \to \mathbb{C} : f(x) = 0 \ \mu\text{-f.ü.}\}$ und bilden die Quotienten

$$L^p := L^p(X,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/N$$

Dann sind die Elemente $f+N$ von L^p Äquivalenzklassen von Funktionen aus $\mathcal{L}^p$, die μ-f.ü. übereinstimmen. Mit der Addition

$$(f+N) + (g+N) := (f+g) + N$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda(f+N) := \lambda f + N$$

wird L^p zu einem Vektorraum, der durch

$$\| f+N \|_p := \| f \|_p$$

normiert wird. Es ist $\| f+N\|_p = 0 \Leftrightarrow f \in N$. Da N das Nullelement in L^p ist, handelt es sich tatsächlich um eine Norm.

Bem.: Hat man sich diesen Zusammenhang einmal klargemacht, kann man mit den Elementen von $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ umgehen wie mit "richtigen" Funktionen – wiewohl wir es natürlich mit den oben definierten Äquivalenzklassen! Man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass zwei Funktionen identifiziert werden, wenn sie μ-f.ü. übereinstimmen.

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, daß die L^p-Räume vollständig, also Banachräume sind.

Betrachten wir zuerst den einfachen Fall $p=\infty$:

Ist $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$, so gibt es eine μ-Nullmenge $N \subset X$, so dass

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup\{ |f_n(x) - f_m(x)| : x \in X \setminus N\} = 0$$

Insbes. ist für $x \in X\setminus N$ $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-

Folge in $\mathbb{C}$ und daher existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$.
Wie in Analysis II (Abschnitt 1.4, Satz 2) sieht man dann ein, dass f auf $X \setminus N$ beschränkt ist und $(f_n)_n$ dort gleichmäßig gegen f konvergiert. Das impliziert die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ und damit auch die von $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Schwieriger ist der Fall $1 \leq p < \infty$. Hierfür gilt der folgende

<u>Satz von</u> <u>Fischer-Riesz</u> (Vollständigkeit von L^p):
Es seien $1 \leq p < \infty$ und $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gelten:

(1) Es existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von (f_n), die sowohl in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ als auch μ-f.ü. konvergiert.

(2) $(f_n)_n$ konvergiert in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

<u>Bem.</u>: (2) ist eine unmittelbare Folgerung aus (1), weil eine Cauchy-Folge höchstens einen Häufungswert besitzt.

Zum Bew. von (1) verwenden wir das folgende

Lemma 2 (Tschebychevsche Ungleichung): Es seien $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f|^p d\mu.$$

Bew.: $\int |f|^p d\mu \ge \int |f|^p \chi_{\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}} d\mu$

$$\ge \varepsilon^p \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}).$$

Bew. von (1) im Satz von Fischer-Reisz:

Da $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in L^p ist, existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$ mit

$$\| f_m - f_{n_k} \|_p \le 4^{-k} \quad \forall m \ge k$$

bzw. mit

$$\int |f_m - f_{n_k}|^p d\mu \le 4^{-pk} \quad \forall m \ge n_k \quad (*)$$

Zur Vereinfachung schreiben wir $g_k := f_{n_k}$ und setzen $Y_k := \{x \in X : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| > 2^{-k}\}$.

Nach der Tschebychev-Ungleichung ist dann

$$\mu(Y_k) \le 2^{kp} \int |g_{k+1} - g_k|^p d\mu \underset{(*)}{\le} 2^{-kp}.$$

Nun seien $Z_n := \bigcup_{k \ge n} Y_k$ und $Z := \limsup_{k \to \infty} Y_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$.

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Y_k) < \infty$, gilt nach Borel-Cantelli, dass

$\mu(Z)=0$, und für $x \notin Z$ haben wir

$$\exists n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } x \in Z_n^c = \bigcap_{k \geq n} Y_k^c, \text{ d.h.}$$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \forall k \geq n : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq 2^{-k}.$$

Das impliziert die Konvergenz der Reihe

$$g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) =: f(x).$$

Das gilt für μ-fast alle $x \in X$, insbes. ist f $\mathcal{A}$-messbar. Die Konvergenz $g_k \to f$ in L^p erhalten wir jetzt mit dem Lemma von Fatou: Ist k fixiert, so gilt für μ-fast alle $x \in X$:

$$|f(x) - g_k(x)|^p = |\lim_{\ell\to\infty} g_\ell(x) - g_k(x)|^p = \lim_{\ell\to\infty} |g_\ell(x) - g_k(x)|^p$$

$$\underset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow} \int |f(x) - g_k(x)|^p d\mu \leq \liminf_{\ell\to\infty} \int |g_\ell - g_k|^p d\mu \underset{(*)}{\leq} 4^{-kp}$$

$$\Rightarrow \|f - g_k\|_p \leq 4^{-k} \to 0 \ (k\to\infty).$$ Insbesondere ist

$f - g_k \in L^p$, $\Rightarrow f \in L^p$, und es gilt $\lim_{k\to\infty} \|f - g_k\|_p = 0$. $\square$

Bem.: Gilt $f_n \to f$ in L^p, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, so kann man daraus nicht die punktweise Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ μ-f.ü. folgern. Bsp.: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ seien $f_{n,k} := \chi_{[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})}$. Dann gilt $\|f_{n,k}\|_p = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}} \to 0 \ (n\to\infty)$, aber die Zahlenfolge $(f_{n,k}(x))_{n\in\mathbb{N}, 1\leq k\leq n}$ konvergiert für kein $x \in [0,1)$.

zum Beweis mancher Aussagen oder Ungleichungen über L^p-Funktionen ist es erforderlich, bestimmte Zusatzannahmen zu machen (z.B. Träger- oder Regularitätsbedingungen). Insofern stellt sich die Frage nach dichten linearen Teilräumen von L^p. Für allgemeine Maßräume kann man nur wenig erreichen. Es gilt:

Lemma 3: Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_n$ $\mathcal{A}$-elementarer L^p-Funktionen, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

(Mit anderen Worten: $\mathcal{E}(X, \mathcal{A}) \cap L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ liegt dicht in $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, wenn $1 \leq p < \infty$ ist.)

Bew.: Nach Zerlegung von f in Realteil g und Imaginärteil h und wiederum dieser in $g = g^+ - g^-$ sowie $h = h^+ - h^-$ können wir o.E. $f \geq 0$ annehmen. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{E}^+(X, \mathcal{A})$ mit $f_n \nearrow f$. Hierfür ist $0 \leq f_n^p, (f - f_n)^p \leq f^p \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Insbesondere gilt $f_n \in L^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und f^p ist eine integrierbare Majorante für $(f - f_n)^p$. Der Lebesguesche Konvergenzsatz liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} (f - f_n)^p \, d\mu = 0,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. $\square$

Für $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ können wir mehr erreichen:

Satz 3: Für $p \in [1,\infty)$ liegt $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$.

Bew.: Nach Lemma 3 ist nur noch die Approximierbarkeit von χ_A für eine Menge $A \in \mathcal{L}_n$ mit $\lambda_n(A) < \infty$ zu zeigen.

<u>Reduktion auf offene Mengen endlichen Maßes:</u>

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert nach dem Approximationssatz eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset \Omega$ und $\lambda_n(\Omega \setminus A) < \varepsilon^p$, also insbes. $\lambda_n(\Omega) < \infty$. Hierfür ist $\| \chi_\Omega - \chi_A \|_p < \varepsilon$. Also müssen wir die Beh. nur noch für χ_Ω mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\lambda_n(\Omega) < \infty$ zeigen.

<u>Reduktion auf Quader:</u>

Zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie oben gibt es abzählbar viele Quader $Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}$ $(k \in \mathbb{N})$, so dass $\Omega = \sum_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und also $\lambda_n(\Omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| < \infty$. Sei wieder $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lambda_n\Big(\Omega \setminus \sum_{k=1}^{N} Q_k\Big) = \sum_{k=N+1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon^p$$

und damit $\| \chi_\Omega - \chi_{\sum_{k=1}^N Q_k} \|_p < \varepsilon$.

Also bleibt nur noch die Approximierbarkeit von χ_Q mit $Q \in \mathcal{Q}^{(n)}$ durch eine Folge von C_c^∞-Funktionen zu zeigen.

Entscheidender Beweisschritt:

Vorgelegt seien ein Quader Q mit Oberfläche A und ein $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta < \frac{\varepsilon^p}{2A}$ und $f_\delta := \chi_Q * k_\delta$ mit einem Friedrichs-mollifier $(k_\delta)_{\delta>0}$. Dann ist $f_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le f_\delta \le 1$, und $f_\delta \neq \chi_Q$ nur auf der Menge

$$\delta Q := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \partial Q) < \delta\}.$$

Deren Lebesgue-Maß ist $\lambda_n(\delta Q) \le 2A\delta < \varepsilon^p$ und daher gilt $\|f_\delta - \chi_Q\|_p \le \lambda_n(\delta Q)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. □

Was können wir mit dieser dichten Teilmenge von L^p anfangen? Ein Anwendungsbeispiel zur Faltung:

Lemma 4: Es seien $1 \le p \le \infty$, $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$, $f \in L^1$ und $g \in L^p$. Dann gilt die Ungleichung

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p ,$$

insbesondere ist $f * g \in L^p$. Im Fall $p = \infty$ ist $f * g$ stetig und beschränkt.

Bew.: $\|f * g\|_p = \left\| \int f(y)\, g(\cdot - y)\, dy \right\|_p$

Dreiecksungl. für Integrale $\le \int |f(y)|\, \|g(\cdot - y)\|_p \, dy = \|f\|_1 \|g\|_p$

Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes.

Zum Beweis der Stetigkeitsaussage im Fall $p=\infty$ sei zunächst $f\in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Zu $x\in\mathbb{R}^n$ sei $(x_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Wir können $|x-x_k|\le 1 \ \forall k\in\mathbb{N}$ annehmen. Dann ist

$$f*g(x_k) = \int f(x_k-y)g(y)\,dy\;,$$

und wegen der Stetigkeit von f gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k-y)g(y) = f(x-y)g(y) \quad \forall y\in\mathbb{R}^n$$

Um eine integrierbare Majorante für $f(x_k-y)g(y)$ zu finden, beachten wir, dass $f(x_k-y)=0$ ist für $y\notin K := \overline{B_1(\cancel{x})} - \operatorname{supp} f$. D.h. wir haben λ_n-f.ü.

$$|f(x_k-y)g(y)| \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty \cdot \chi_K(y)\,,\quad \chi_K\in L^1.$$

Also ist der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar und ergibt

$$\lim_{k\to\infty} f*g(x_k) = \lim_{k\to\infty}\int f(x_k-y)g(y)\,dy \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int \lim_{k\to\infty} f(x_k-y)g(y)\,dy$$

$$= \int f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Nun sei $f\in L^1$, $x\in\mathbb{R}^n$ und $(x_j)_j$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x$. Wir wählen eine Folge $(f_k)_k$ in $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}\|f-f_k\|_1 = 0$. Dann ist

$$|f*g(x_j)-f*g(x)|$$

$$\leq |(f-f_k)*g(x_j)| + |f_k*g(x_j)-f_k*g(x)| + |(f_k-f)*g(x)|$$

$$\leq 2\,\|f-f_k\|_1\,\|g\|_\infty + |f_k*g(x_j)-f_k*g(x)|$$

↖ zuerst bewiesene Ungleichung.

Jetzt zuerst $j\to\infty$, dann verschwindet der 2. Summand.

Dann $k\to\infty$ für den ersten Beitrag. □