2.5.3 Das Lebesgue-Integral

Wendet man die allgemeinen Definitionen aus Abschnitt 2.5.1 auf den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ an, so erhält man das Lebesgue-Integral auf dem $\mathbb{R}^n$. Selbstverständlich stehen hierfür alle allgemein gezeigten Aussagen einschließlich der Konvergenzsätze zur Verfügung. Eine Vielzahl von Schreibweisen ist für das Lebesgue-Integral üblich, z. B.:

$$\lambda_n[f] = \int f \, d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \lambda_n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n$$

bzw. bei der Integration über Teilbereiche $A \in \mathcal{L}_n$

$$\lambda_n[\chi_A f] = \int_A f \, d\lambda_n = \int_A f(x) \, d\lambda_n(x) = \int_A f(x) \, dx = \dots$$

2.5.3.1 Der Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Die Verwendung der Schreibweise $\int_A f(x) \, dx$ (ohne Bezeichnung des Lebesgue-Maßes), wie wir sie bereits beim Riemann-Integral über Jordan-Bereiche verwendet haben, hat durchaus ihre Berechtigung. Wie wir bereits wissen, ist die Einschränkung

des Lebesgue-Maßes λ_n auf das Mengensystem der Jordanbereiche im $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale Jordansche Inhalt. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die Einschränkung des Lebesgue-Integrals auf die Klasse der (auf einem Quader) Riemann integrierbaren Funktionen mit dem Riemann-Integral übereinstimmt, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 7: Es sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein kompakter achsenparalleler Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist die triviale Fortsetzung

$$f_Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_Q(x) := \begin{cases} f(x) ; & x \in Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f_Q \, d\lambda_N .$$

Bem.: Das Integral auf der linken Seite bezeichnet das Riemann-Integral über Q, das rechte das Lebesgue-Integral über dem $\mathbb{R}^N$ (jedenfalls formal), wobei Beiträge aber nur aus dem Bereich Q kommen. Die Bezeichnung ist zwar korrekt, aber unverständlich, daher werden wir bereits im Beweis zu $\int_{\mathbb{R}^N} f_Q \, d\lambda_N = \int_Q f \, d\lambda_N = \lambda_N[f]$ übergehen.

Bew.: Da Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt sind, können wir O.E. $f \geq 0$ annehmen.

Nach Definition des Riemann-Integrals ist

$$\int_Q f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n),$$

wobei $(Z_n)_n = (\{Q_k^{(n)} : 1 \leq k \leq p(n)\})_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge ist (d.h. $\lim_{n\to\infty} \sup_{k=1}^{p(n)} \operatorname{diam}(Q_k^{(n)}) = 0$) und

$$s(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{p(n)} m_k^{(n)} |Q_k^{(n)}| \quad \text{mit } m_k^{(n)} := \inf\{f(x) : x \in Q_k^{(n)}\}$$

sowie

$$S(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{p(n)} M_k^{(n)} |Q_k^{(n)}|, \text{ dabei } M_k^{(n)} := \sup\{f(x) : x \in Q_k^{(n)}\}.$$

Wir wählen $(Z_n)_n$ so, dass stets $Z_n \subset Z_{n+1}$ gilt, also Z_{n+1} eine Verfeinerung von Z_n ist. Dann ist die Folge $(g_n)_n$ von Treppenfunktionen

$$g_n = \sum_{k=1}^{p(n)} m_k^{(n)} \chi_{Q_k^{(n)}}$$

monoton steigend, es gilt $g_n \leq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\lambda_N[g_n] = \sum_{k=1}^{p(n)} m_k^{(n)} |Q_k^{(n)}| = s(f, Z_n).$$

Andererseits ist die Folge $(h_n)_n$, def. durch

$$h_n = \sum_{k=1}^{p(n)} M_k^{(n)} \cdot \chi_{Q_k^{(n)}}$$

monoton fallend und es gelten $h_n \geq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\lambda_N[h_n] = S(f, Z_n).$$

Wegen Monotonie und Beschränktheit sind die Funktionenfolgen $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ punktweise konvergent. Es existieren also die Grenzfunktionen

$$g := \lim_{n\to\infty} g_n \qquad \text{und} \qquad h := \lim_{n\to\infty} h_n$$

und es gilt $g \leq f \leq h$. Ferner ist aufgrund des Lebesgueschen Konvergenzsatzes (die konstante Funktion $G = \sup\{f(x) : x \in Q\}$ ist eine Majorante)

$$\lambda_N[h-g] = \lambda_N[h] - \lambda_N[g] = \lim_{n\to\infty} \lambda_N[h_n] - \lambda_N[g_n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) - s(f, Z_n) = 0,$$

letzteres wegen der Riemann-Integrierbarkeit von f. Da $h - g \geq f - g \geq 0$ folgt hieraus mit Satz 2(2), dass $g = f = h$ λ_N-f.ü. Insbesondere ist mit g und h auch f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\lambda_N[f] = \lambda_N[g] = \lim_{n\to\infty} \lambda_N[g_n] = \lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \int_Q f(x)\,dx.$$

$\square$.

Folgerung: Ist $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist f auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_1 .$$

Bew.: Per def. ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a,b\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-a,b)} f \, d\lambda_1$$

aufgrund von Satz 7. Nun können $a,b \nearrow \infty$ gewählt werden, dann ergibt der Satz von Beppo Levi

$$\lim_{a,b\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-a,b)} f \, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_1$$

und damit die Beh..

Bem.: Die Aussage der Folgerung wird ohne die Voraussetzung $f \geq 0$ falsch! Bsp.:

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \chi_{[k,k+1)}(x) .$$

Hierfür existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{1}^{R} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) .$$

Andererseits: Wäre f auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, so auch $|f| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1)}$ mit dem Integral (für nichtnegative $\mathcal{L}_1$-messbare Funktionen)

$$\lambda_1[|f|] = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}}_{= \lambda_1[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \chi_{[k,k+1)}]} = \infty .$$

2.5.3.2 <u>Die Transformationsformel</u>

Für eine affin-lineare Transformation

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto Tx := Ax + b$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und einer invertierbaren $n\times n$-Matrix A haben wir in Abschnitt 2.3.3 (Beweis von Satz 4) festgestellt, dass das Lebesgue-Maß

$$\lambda_n : \mathcal{L}_n \to [0,\infty], \qquad B \mapsto \lambda_n(B)$$

mit dem Maß

$$\mu : \mathcal{L}_n \to [0,\infty], \quad B \mapsto \mu(B) := \frac{1}{|\det(A)|} \lambda_n(TB)$$

übereinstimmt, was die Identität

$$\lambda_n(TB) = |\det(A)| \cdot \lambda_n(B) \qquad (*)$$

für alle $B \in \mathcal{L}_n$ bedeutet. Umgeschrieben mit $C = TB$ und mehrfacher Verwendung charakteristischer

Funktionen lautet (*):

$$\lambda_n(C) = |\det(A)|\ \lambda_n(T^{-1}(C))$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_n[\chi_C] = |\det(A)|\ \lambda_n[\chi_C \circ T], \qquad (**)$$

denn $\chi_{T^{-1}(C)}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in T^{-1}(C) \Leftrightarrow Tx \in C \Leftrightarrow (\chi_C \circ T)(x) = 1$.

Wenn die Maße λ_n und μ identisch sind, stimmen auch die Integrale nach diesen Maßen überein. D.h., wir können in (**) die charakteristische Funktion χ_C durch eine beliebige Lebesgue-integrierbare Funktion ersetzen. Das liefert uns die folgende <u>Transformationsformel für affin-lineare Abbildungen</u>:

Satz: Es sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Tx := Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $f \circ T$ Lebesgue integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\lambda_n[f] = |\det(A)| \cdot \lambda_n[f \circ T].$$

Anders Schreibweisen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T \, d\lambda_n$$

oder $$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, d\lambda_n(y) = |\det(A)| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\, \lambda_n(dx)$$

oder, wenn man nicht betonen möchte, nach λ_n zu integrieren

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy = |\det(A)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\, dx,$$

lokkeres symbolisch: $y = Ax+b \Rightarrow$ "$dy = |\det(A)|\, dx$" (nicht gerade korrekt, aber gut merkbar).

Im Folgenden soll eine allgemeinere Transformationsformel bewiesen werden für solche Abbildungen

$$T : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n \qquad ; \Omega, \Omega' \text{ offen},$$

die zwar nicht affin-linear, jedoch stetig diff'bar und bijektiv mit ebenfalls stetig diff'barer Umkehrfunktion $T^{-1} : \Omega' \to \Omega$ sind.

<u>Def.</u>: Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T : \Omega \to \Omega'$ bijektiv. Dann heißt T ein <u>C^1-Diffeomorphismus</u> (oder auch <u>C^1-invertierbar</u>), wenn sowohl T als auch T^{-1} stetig differenzierbar sind.

<u>Bem.</u>: (1) Allgemeiner spricht man für $k \geq 1$ von einem Diffeomorphismus der Klasse C^k, wenn T und T^{-1} k-mal stetig differenzierbar sind.

(2) Da (total) differenzierbare Abbildungen stetig sind, ist jeder C^1-Diffeomorphismus $T : \Omega \to \Omega'$ zugleich ein Homöomorphismus, also stetig mit stetiger Inverser. Insbesondere sind die Urbilder offener Mengen unter T wie auch unter T^{-1} wieder offen.

(3) Ist $T : \Omega \to \Omega'$ homöomorph, so sind T $\mathcal{B}(\Omega), \mathcal{B}(\Omega')$-messbar und T^{-1} $\mathcal{B}(\Omega'), \mathcal{B}(\Omega)$-meß..

Nach Lemma 2 in Abschnitt 2.4 gilt daher $T(\mathcal{B}(\Omega)) = \mathcal{B}(\Omega')$. Hierbei ist $\mathcal{B}(\Omega) = \{B \subset \Omega : B \in \mathcal{B}_n\}$ die σ-Algebra derjenigen Borelmengen im $\mathbb{R}^n$, die in Ω liegen. Es gilt

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\{U \subset \Omega : U \text{ ist offen}\}) = \sigma(\{Q \subset \Omega : Q \in \mathcal{Q}^{(n)}\}),$$

letzteres weil $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als offen vorausgesetzt ist und jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung von halboffenen Quadern dargestellt werden kann. (Vgl. Satz 5 in Abschnitt 2.1 und die anschließende Bem.) Ebenfalls gilt

$$\mathcal{B}(\Omega) = \sigma(\{\overline{Q} \subset \Omega : Q \in \mathcal{Q}^{(n)}\}),$$

da wir $Q = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i - \frac{1}{j}]$ schreiben können.

(4) Ist $T : \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus und $N \subset \Omega$ eine λ_n-Nullmenge, so ist auch $\lambda_n(TN) = 0$.

Begründung: Zunächst sei Q ein kompakter Quader, so dass $N \subset Q \subset \Omega$ gilt. Q ist konvex, also ist nach der Mittelwertungleichung (aus Anm II) $T|_Q$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante

$$L = \sup\{\|DT(\xi)\| : \xi \in Q\}$$

und daher gilt

$$\lambda_n(T(N)) \leq \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(T(Q_k)) : N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \subset Q;\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\}$$

$$\leq L^n \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| : N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \subset Q,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\} = 0.$$

Für den allgemeinen Fall schreiben wir $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{Q_k}$ mit $Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}$ und haben $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N \cap \overline{Q_k}$, so dass $T(N) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T(N \cap \overline{Q_k})$ als abzählbare Vereinigung von λ_n-Nullmengen ebenfalls eine λ_n-Nullmenge ist.

Ebenso gilt für eine λ_n-Nullmenge $N \subset \Omega'$, dass $\lambda_n(T^{-1}(N)) = 0$ ist.

Da die Lebesgue-σ-Algebra $\mathcal{L}_n$ durch Vervollständigung von $\mathcal{B}_n$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ_n entsteht, ergibt sich hieraus mit (8), dass für

$$\mathcal{L}_\Omega := \{M \in \mathcal{L}_n : M \subset \Omega\}$$

gilt $T(\mathcal{L}_\Omega) = \mathcal{L}_{\Omega'}$. –

Die Einschränkung $\lambda_n|_{\mathcal{L}_\Omega}$ des Lebesgue-Maßes auf $\mathcal{L}_\Omega$ werden wir im weiteren auch mit λ_n bezeichnen.

Damit ist der maßtheoretische Rahmen abgesteckt für den Beweis der folgenden!

Transformationsformel für C^1-Diffeomorphismen:

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T: \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f: \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega', \mathcal{L}_{\Omega'}, \lambda_n)$ genau dann, wenn $|\det DT|\, f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \lambda_n)$ ist, und in diesem Fall gilt

$$\lambda_n[f] = \int_\Omega f(T(x))\, |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Diese Formel ist eine Folgerung aus dem nachstehenden

Satz 9: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T: \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann stimmt das Lebesgue-Maß $\lambda_n: \mathcal{L}_{\Omega'} \to [0,\infty]$ überein mit dem Maß

$$\nu: \mathcal{L}_{\Omega'} \to [0,\infty], \quad C \mapsto \nu(C) := \int_{T^{-1}(C)} |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Kommentar und Begründung der Transformationsformel: ν wie angegeben ist tatsächlich ein durch T induziertes Maß: Wir haben $\nu = \mu_T$ für

$$\mu: \mathcal{L}_\Omega \to [0,\infty], \quad A \mapsto \mu(A) := \int_A |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Nach Satz 3 in Abschnitt 2.5.1 ist das Integral nach einem induzierten Maß gegeben durch

$$\mu_T[f] = \mu[f \circ T] \underset{\text{hier}}{=} \int_\Omega f(T(x))\,|\det DT(x)|\,d\lambda_n(x),$$

und das ist gerade die rechte Seite der behaupteten Transformationsformel. Nach demselben Satz gilt

$$f \text{ ist } \mathcal{L}_{\Omega'}\text{-messbar} \Rightarrow f \circ T \text{ ist } \mathcal{L}_\Omega\text{-messbar}.$$

Da $T^{-1}: \mathcal{L}_{\Omega'}, \mathcal{L}_\Omega$-messbar ist, haben wir hier Äquivalenz, und die stets positive und stetige Dichte $|\det DT|$ ändert nichts an der Messbarkeit. Weiter sagt der Satz 3: f ist genau dann nach $\nu = \lambda_n|_{\Omega'}$ integrierbar, wenn $f \circ T$ nach μ integrierbar ist. Da μ die Lebesgue-Dichte $|\det DT|$ besitzt, ist letzteres wiederum genau dann der Fall, wenn $|\det DT| \cdot f \circ T \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \lambda_n)$ ist. – Damit ist die Implikation "Satz 3 $\Rightarrow$ Transformationsformel" erläutert.

Bew. von Satz 3: Es zeigte ist

$$\lambda_n(C) = \int_{T^{-1}(C)} |\det DT(x)|\,d\lambda_n(x) \qquad \forall C \in \mathcal{L}_{\Omega'},$$

was wir wegen $\mathcal{L}_{\Omega'} = T(\mathcal{L}_\Omega)$ umschreiben können zu

$$\lambda_n(T(A)) = \int_A |\det DT(x)|\,d\lambda_n(x) \quad \forall A \in \mathcal{L}_\Omega \quad (!)$$

(1) Für einen kompakten Quader $Q \subset \Omega$ zeigen wir die Ungleichung

$$\lambda_n(TQ) \leq \int_Q |\det DT(x)| \, d\lambda_n(x)$$

Hierzu führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass

$$\Delta(Q) := \lambda_n(TQ) - \int_Q |\det DT(x)| \, d\lambda_n(x) > 0$$

und damit auch $\alpha := \frac{\Delta(Q)}{|Q|} > 0$ ist. Die Abbildung Δ verhält sich offenbar additiv bei (bis auf Nullmengen) disjunkter Vereinigung. Wir zerlegen Q in 2^n Teilquader halber Kantenlänge. Demnach gibt es (mindestens) einen Teilquader Q_1 mit

$$\frac{\Delta(Q_1)}{|Q_1|} \geq \alpha, \qquad \text{wobei } |Q_1| = |Q| \cdot 2^{-n}.$$

Durch wiederholte Seitenhalbierungen erhalten wir eine absteigende Folge $Q \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_k \supset \ldots$ von Quadern des Volumens $|Q_k| = |Q| \cdot 2^{-nk}$ mit

$$\frac{\Delta(Q_k)}{|Q_k|} \geq \alpha > 0.$$

Die Mittelpunkte x_k dieser Quader bilden eine Cauchy-Folge in Q, und weil Q kompakt ist, gilt

$$x_0 := \lim_{k \to \infty} x_k \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{Q}_k \subset Q \subset \Omega.$$

Einen Widerspruch erzielen wir, indem wir andererseits zeigen, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\Delta(Q_k)}{|Q_k|} \le 0.$$

Dazu schreiben wir

$$\Delta(Q_k) = \lambda_n(TQ_k) - \int_{Q_k} |\det DT(x_0)|\, d\lambda_n(x) + \int_{Q_k} \underbrace{|\det DT(x_0)| - |\det DT(x)|}_{d\lambda_n(x)}$$

$$\le |\det DT(x_0)| \Big(|\det DT(x_0)|^{-1} \lambda_n(TQ_k) - \underbrace{\lambda_n(Q_k)}_{=|Q_k|} \Big)$$

$$+ \int_{Q_k} |\det DT(x_0) - \det DT(x)|\, d\lambda_n(x) =: I_k + II_k.$$

Zur Abschätzung von I_k benutzen wir die Transformationsformel $\lambda_n(AM) = |\det(A)|\,\lambda_n(M)$ für lineare Abbildungen mit $A = DT(x_0)^{-1}$. Damit ist

$$\frac{I_k}{|Q_k|} \le |\det DT(x_0)| \left(\frac{\lambda_n(DT(x_0)^{-1}(T(Q_k)))}{|Q_k|} - 1 \right).$$

Für $F(x) = DT(x_0)^{-1} T(x)$ gilt $DF(x) = DT(x_0)^{-1} DT(x)$, also wegen der Stetigkeit von DT: $\lim_{x\to x_0} DF(x) = E_n$.

Sei $L_k := \sup\{\|DF(\xi)\| : \xi \in Q_k\}$. Dann ist wegen der Stetigkeit von DF in x_0 $\lim_{k\to\infty} L_k = 1$, ferner

$$\lambda_n(F(Q_k)) \le L_k^n |Q_k| \qquad \text{(MWS, vgl. Bem. (4))},$$

also $\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|} \lambda_n(F(Q_k)) \le 1$ und damit

auch $\limsup_{k\to\infty} \frac{I_k}{|Q_k|} \le 0.$

Ferner ist

$$\frac{I_k}{|Q_k|} = \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |\det DT(x_0) - \det DT(x)| \, d\lambda_n(x)$$

$$\leq \sup \{ |\det DT(x_0) - \det DT(x)| : x \in Q_k \} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0,$$

letzteres wegen der Stetigkeit von $\det DT$ in $x_0 \in Q$. Damit ist die behauptete Ungleichung für kompakte Quader $Q \subset \Omega$ gezeigt.

(2) Wir setzen

$$\mathcal{D} := \{ A \in \mathcal{B}(\Omega) : \lambda_n(TA) \leq \int_A |\det DT(x)| \, d\lambda_n(x) \}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ abgeschlossen unter $\bar{c}$ und $\sum_{i \in \mathbb{N}}$, also ein Dynkin-System, und umfasst nach (1) das $\cap$-System $\overline{\mathcal{Q}}_\Omega$ der kompakten achsenparallelen Quader in Ω. Damit ist

$$\mathcal{D} \supset \mathcal{D}(\overline{\mathcal{Q}}_\Omega) = \mathcal{R}(\overline{\mathcal{Q}}_\Omega) = \sigma(\overline{\mathcal{Q}}_\Omega) = \mathcal{B}(\Omega).$$

Satz 4 in Abschnitt 2.1 $\quad$ $\Omega \in \mathcal{R}(\overline{\mathcal{Q}}_\Omega)$ $\quad$ Bem. (3) oben

Also gilt die Ungleichung

$$\lambda_n(TA) \leq \int_A |\det DT(x)| \, d\lambda_n(x)$$

für alle Borelmengen $A \subset \Omega$. Daraus folgt für alle nichtnegativen $\mathcal{B}(\Omega)$-messbaren Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$, dass

$$\lambda_n[g \circ T^{-1}] \leq \int_\Omega g(x)\, |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x).$$

Hieraus wählen wir mit $A \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$g(x) = \chi_A(x)\, |\det DT(x)|^{-1},$$

so dass

$$\int_{T(A)} |\det DT(T^{-1}(y))|^{-1}\, d\lambda_n(y) \leq \lambda_n(A)$$

Wegen $DT^{-1}(y) = DT(T^{-1}(y))^{-1}$ und $T(\mathcal{B}(\Omega)) = \mathcal{B}(\Omega')$

also $\int_C |\det DT^{-1}(y)|\, d\lambda_n(y) \leq \lambda_n(T^{-1}(C))$

$\forall C \in \mathcal{B}(\Omega')$. Vertauschen wir die Rollen von $\Omega \leftrightarrow \Omega'$, $T \leftrightarrow T^{-1}$, $A \leftrightarrow C$, so haben wir auch die andere Ungleichung und damit (!) $\forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$ gezeigt.

(3) Ist schließlich $A = B + N \in \mathcal{L}_\Omega$ mit $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ und einer λ_n-Nullmenge N, so ist nach Bem. (4) auch $T(N)$ eine λ_n-Nullmenge und wir erhalten

$$\int_A |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x) = \int_B |\det DT(x)|\, d\lambda_n(x)$$

$$= \lambda_n(T(B)) = \lambda_n(T(B) + T(N)) = \lambda_n(T(A)).$$

$\square$

Als Anwendung der Transformationsformel diskutieren wir die n-dim. Kugel- oder Polarkoordinaten:

<u>Satz 10</u>: Es sei f auf $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$ Lebesgue-integrierbar und $B := \{\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi'| < 1\}$. Dann gilt mit $\xi_n := \sqrt{1-|\xi'|^2}$:

$$\int_{B_R(0)} f(y)\, d\lambda_n(y) = \int_{(0,R)\times B} \left(f(r\xi', r\xi_n) + f(r\xi', -r\xi_n)\right) \frac{r^{n-1}}{\xi_n}\, d\lambda_n(r, \xi').$$

<u>Bew.</u> Wir verwenden zwei Transformationen, nämlich

$$T^{\pm} : (0,R) \times B \longrightarrow \{y \in B_R(0) : y_n \gtrless 0\},$$

$$(r, \xi') \longmapsto T^{\pm}(r, \xi') := r(\xi', \pm\xi_n) \qquad (\xi_n = \sqrt{1-|\xi'|^2}).$$

$T^{\pm}$ bildet $(0,R) \times B$ diffeomorph auf die obere bzw. die untere Halbkugel vom Radius R im $\mathbb{R}^n$ ab. Die "Äquatorialebene" $\{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$ kann als λ_n-Nullmenge für die Integration vernachlässigt werden. Die Jacobi-Matrizen berechnen wir zu $DT^{\pm}(r, \xi') =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1^{\pm}}{\partial r}(r,\xi') & \frac{\partial T_1^{\pm}}{\partial \xi_1}(r,\xi') & \cdots & \frac{\partial T_1^{\pm}}{\partial \xi_{n-1}}(r,\xi') \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial T_n^{\pm}}{\partial r}(r,\xi') & \frac{\partial T_n^{\pm}}{\partial \xi_1}(r,\xi') & \cdots & \frac{\partial T_n^{\pm}}{\partial \xi_{n-1}}(r,\xi') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & r & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & r & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ \xi_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & r \\ \pm\xi_n & \mp\frac{r\xi_1}{\xi_n} & \mp\frac{r\xi_2}{\xi_n} & \cdots & \mp\frac{r\xi_{n-1}}{\xi_n} \end{pmatrix}$$

Für die Determinanten erhalten wir $|\det DT^{\pm}(r,\xi')| =$

$$= r^{n-1} \left| \det \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \xi_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \pm\xi_n & \mp\frac{\xi_1}{\xi_n} & \cdots & & \mp\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} \end{pmatrix} \right|$$

Entwicklung nach der letzten Zeile ergibt

$$\ldots = r^{n-1} \cdot \Big| \xi_n \det(E_{n-1}) + \frac{\xi_1}{\xi_n} \det \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{\xi_2}{\xi_n} \det \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & 0 & & 0 \\ \xi_2 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & \\ & \vdots & 0 & 1 & \\ \xi_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_3}{\xi_n} \det \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & & & 0 \\ \xi_2 & & 1 & & \\ \xi_3 & & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \xi_{n-1} & & & & 1 \end{pmatrix} \mp \ldots \Big|$$

$$= r^{n-1} \left(\xi_n + \frac{\xi_1^2}{\xi_n} + \frac{\xi_2^2}{\xi_n} + \ldots + \frac{\xi_{n-1}^2}{\xi_n} \right)$$

$$= \frac{r^{n-1}}{\xi_n} \left(\xi_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \right) = \frac{r^{n-1}}{\xi_n} .$$

Fügt man die beiden Beträge für die obere u. die untere Halbkugel zusammen, ergibt sich die angegebene Identität.

$\square$

Bem.: (1) Im nächsten Abschnitt werden wir den Satz von Fubini in vollem Umfang beweisen – für Riemann-integrierbare Funktionen ist uns dieser Satz ja schon vertraut. Nehmen wir diesen vorweg, so können wir die Identität in Satz 10 in die folgende, etwas anwendungsfreundlichere Form bringen:

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,d\lambda_n(y) = \int_0^R \Big(\int_B \big(f(r\xi', r\xi_n) + f(r\xi', -r\xi_n)\big) \frac{d\lambda_{n-1}(\xi')}{\xi_n} \Big) r^{n-1} d\lambda_1(r).$$

Spätestens an dieser Stelle ist es üblich, auf die besondere Bezeichnung des Lebesgue-Maßes zu verzichten. Man schreibt also

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \Big(\int_B f(r\xi', r\xi_n) + f(r\xi', -r\xi_n) \frac{d\xi'}{\xi_n} \Big) r^{n-1} dr$$

Das innere Integral wird sich später als Integral der Funktion $\xi \mapsto f(r\xi)$ über die Einheitssphäre erweisen. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich für rotationssymmetrische Funktionen, d.h. für $f(z) = g(|z|)$ mit einem $g: (0,R) \to \mathbb{R}$. Hierfür ist dann

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \Big(2 \int_B \frac{d\xi'}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} \Big) g(r)\, r^{n-1} dr$$

$$= \omega_n \cdot \int_0^R g(r)\, r^{n-1} dr,$$

wobei (nach der Vorbemerkung) ω_n die Oberfläche der n-dim. Einheitskugel ist. Mit $R=1$ und $f\equiv 1$ erhalten wir

$$\tau_n = \int_{B_1(0)} dy = \omega_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n},$$

also die Beziehung $\omega_n = n\tau_n$ zwischen der Oberfläche und dem Volumen der n-dim. Einheitskugel.

(2) Für $n=2$ ergibt sich (in diesem Fall ist $\xi' = \xi_1$!)

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \left(\int_{-1}^1 f(r\xi_1, r\xi_2) + f(r\xi_1, -r\xi_2) \frac{d\xi_1}{\xi_2} \right) r\,dr$$

$$\underset{\xi_2=\xi_1}{=} \int_0^R \left(\int_{-1}^1 f(r\xi, r\sqrt{1-\xi^2}) + f(r\xi, -r\sqrt{1-\xi^2}) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) r\,dr$$

Die Substitution $\xi = \cos\varphi$, "$d\xi = -\sin\varphi\, d\varphi$" mit $\varphi \in (0,\pi)$ für den ersten Summanden, wobei $0 < \sin\varphi = \sqrt{1-\xi^2}$, und $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ für den zweiten Summanden, für den $0 < -\sin\varphi = \sqrt{1-\xi^2}$ ist, führt auf

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\, r\,dr,$$

was eine äußerst nützliche Identität zur Berechnung von Integralen über Kreise in der Ebene ist. Als Anwendung kann ich Ihnen nun endlich zeigen,

dass

Beh.: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

Bew.: $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \underset{\text{Symm.}}{=} 2 \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \Gamma(\frac{1}{2})$,

wobei wir im vorletzten Schritt $y^2 = t$, also "$\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2dy$" substituiert haben. Für die zweite behauptete Identität schreiben wir

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\right)^2 = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy\right)^2 \quad \text{jetzt: Fubini für Riemann}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]^2} e^{-y_1^2 - y_2^2} dy_1 dy_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|y|^2} dy \quad \text{2x B. Levi}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} e^{-|y|^2} dy = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, dr$$

$$= 2\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-R^2}) = \pi.$$

(3) Auch in höheren Dimensionen gibt es Winkelversionen der Kugelkoordinaten, s. z. B. Kaballo III, Bsp. 11.10. Wirklich wichtig ist der Fall $n = 3$. Hier für gilt:

$$\int_{B_R(0)} f(y)\, dy = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)\, d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta\, r^2 dr.$$

Begründung: Nach Satz 10 gilt

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy = \int_0^R \left(\int_B f(r\xi', r\xi_3) + f(r\xi', -r\xi_3) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_3} \right) r^2 dr,$$

wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis ist, so dass wir auf das innere Integral die Bem. (2) anwenden können. Das ergibt

$$\int_B f(r\xi', \pm r\xi_3) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_3} = \int_B f(r\xi', \pm r\sqrt{1-|\xi'|^2}) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r\rho\cos\varphi, r\rho\sin\varphi, \pm r\sqrt{1-\rho^2}) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} d\varphi\, \rho\, d\rho.$$

Jetzt substituiert man $\rho = \sin\vartheta$, "$d\rho = \cos\vartheta\, d\vartheta$", wobei wir im

$+$ - Fall: $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sqrt{1-\rho^2} = \cos\vartheta$, $\int_0^1 \dots \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \sin\vartheta\, d\vartheta$

wählen und im

$-$ - Fall: $\vartheta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow -\sqrt{1-\rho^2} = \cos\vartheta$, und

$$\int_0^1 \dots \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_\pi^{\pi/2} \dots \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{-\cos\vartheta} \cdot \cos\vartheta = \int_{\pi/2}^{\pi} \dots \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Setzt man beide Beiträge ein, ergibt sich wie behauptet

$$\int_{B_R(0)} f(y)\,dy$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)\, d\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta\, r^2 dr$$