2.5.2 Konvergenzsätze

Der erste der hier zu diskutierenden Konvergenzsätze – der Satz von Beppo Levi von der monotonen Konvergenz – wird durch die Definition des Integrals als Grenzwert der Integrale einer aufsteigenden Folge approximierender Treppenfunktionen geradezu erzwungen:

Satz 4 (B. Levi) Es seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und, für $n\in\mathbb{N}$, $f, f_n : X \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}$-messbar, so dass $f_n \nearrow f$ μ-f.ü. Dann gilt

$$\mu[f] = \lim_{n\to\infty} \mu[f_n].$$

Insbesondere ist $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$, wenn dieser Grenzwert endlich ist.

Bew.: O.E. gelte überall $f_n \nearrow f$. – Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ existiert eine Folge $(f_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}^+(X,\mathcal{A})$, so dass $f_{n,k} \nearrow f_n$ $(k\to\infty)$.
Wir definieren

$$g_k := \max_{n=1}^{k} f_{n,k} \in \mathcal{E}^+(X,\mathcal{A}).$$

Dann gilt $0 \le g_k \le g_{k+1}$ (weil schon $0 \le f_{n,k} \le f_{n,k+1}$), es existiert also der punktweise Grenzwert

$$g := \lim_{k\to\infty} g_k \in \mathcal{M}^+(X,\mathcal{A}).$$

Nun haben wir für $1 \leq n \leq k$: $f_{n,k} \leq f_n \leq f_k$ und daher

$$f_{n,k} \leq g_k \leq f_k \leq f \qquad (*),$$

woraus für $k \to \infty$ folgt $f_n \leq g \leq f$, also ($n \to \infty$!) $g = f$.

Aus (*) folgt für die Integrale

$$\mu[f_{n,k}] \leq \mu[g_k] \leq \mu[f_k],$$

woraus sich laut der Definition des Integrals für $k \to \infty$ ergibt, dass

$$\mu[f_n] = \lim_{k\to\infty} \mu[f_{n,k}] \leq \lim_{k\to\infty} \mu[g_k] = \mu[g]$$
$$\leq \lim_{k\to\infty} \mu[f_k].$$

Also $\lim_{n\to\infty} \mu[f_n] = \mu[g] = \mu[f]$. $\square$

<u>Folgerungen</u>: (1) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt

$$\mu\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n]$$

(2) Es sei $\rho \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$. Dann wird durch

$$\nu(A) := \mu[\rho \cdot \chi_A] \qquad (A \in \mathcal{A})$$

ein Maß $\nu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definiert. Hierfür gilt: $\mu(A) = 0$ $\Rightarrow \nu(A) = 0$, diese Eigenschaft wird als <u>Absolut-stetigkeit</u> des Maßes ν bezüglich μ bezeichnet. Die Funktion $\rho \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ wird als <u>Dichte</u> von ν bezüglich μ bezeichnet. Hierfür gilt: Genau dann ist $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein endliches Maß, wenn $g \in \mathcal{L}(X,\mathcal{A},\mu)$.

Beweis der Folgerungen:

(1) ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. Levi auf die Partialsummenfolge $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$.

(2) $\nu(\emptyset) = \mu[0] = 0$, $\nu(A) = \mu[g \cdot \chi_A] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$,

$$\nu\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \mu\Big[g \cdot \chi_{\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k}\Big] = \mu\Big[g \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}\Big]$$

$$\underset{(1)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu[g\chi_{A_k}] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k).$$

Damit ist $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß. Für den Zusatz beachten wir: $\mu(A) = 0 \Rightarrow g \cdot \chi_A = 0$ μ-f.ü.. Mit Satz 2 (1): $\nu(A) = \mu[g\chi_A] = 0$.

Satz 5 ("Lemma von Fatou") Es seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und, für $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A})$. Dann gelten:

(1) $f_n \geq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mu[g^-] < \infty$

$$\Rightarrow \mu\Big[\liminf_{n\to\infty} f_n\Big] \leq \liminf_{n\to\infty} \mu[f_n]$$

(2) $f_n \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $\mu[g^+] < \infty$

$$\Rightarrow \mu\Big[\limsup_{n\to\infty} f_n\Big] \geq \limsup_{n\to\infty} \mu[f_n].$$

Bew. von (1): Wenn $\mu[g^+] = \infty$ ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (9-1)

$$\mu[f_n] \geq \mu[g] = \mu[g^+] - \underbrace{\mu[g^-]}_{<\infty \text{ n.V.}} = \infty ,$$

und dann ist die Beh. trivial. Daher können wir $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ annehmen.

Zunächst stellen wir fest: Ist $(h_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ und $g_n := \inf_{k \geq n} h_k$, so gelten $0 \leq g_n \leq h_n$ und $g_n \nearrow \liminf_{k\to\infty} h_k$. Mit dem Satz von B. Levi folgt

$$\mu[\liminf_{k\to\infty} h_k] = \lim_{n\to\infty} \mu[g_n] \overset{g_n \leq h_n}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \mu[h_k].$$

Dies wenden wir an mit $h_n := f_n - g \geq 0$:

$$\mu[\liminf_{n\to\infty} f_n - g] = \mu[\liminf_{n\to\infty} f_n] - \mu[g]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \mu[f_n - g] \leq \liminf_{n\to\infty} \mu[f_n] - \mu[g].$$

$\mu[g] \in \mathbb{R}$ können wir jetzt auf beiden Seiten addieren. Es folgt (1).

(2) erhalten wir aus (1), indem wir f_n durch $-f_n$ und g durch $-g$ ersetzen. Hierbei ist $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$ zu beachten.

Satz 6 (Lebesguescher Konvergenzsatz, auch: Satz von der majorisierten Konvergenz)

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und, für $n \in \mathbb{N}$, $f, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-f.ü. Ferner existiere eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, so dass $|f_n| \leq g$ μ-f.ü.. Dann ist auch $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu[f_n] = \mu[f] \quad .$$

Bew.: Nach Abänderung von f_n und f auf einer μ-Nullmenge können wir annehmen, dass $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ überall gelten. Dann sind die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou erfüllt, denn wir haben $-g \leq f_n \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\mu[g^\pm] < \infty$. Wir erhalten

$$\mu[f] = \mu[\liminf_{n\to\infty} f_n] \underset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \mu[f_n]$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \mu[f_n] \leq \mu[\limsup_{n\to\infty} f_n] = \mu[f],$$

also überall "=". Damit existiert

$$\lim_{n\to\infty} \mu[f_n] = \mu[f] \in \mathbb{R},$$

letzteres, da $|\mu[f]| \leq \mu[g] \in \mathbb{R}$. $\square$

Bem.: Die Funktion g im Lebesgueschen Konvergenzsatz wird als <u>integrierbare Majorante</u> (der Funktionenfolge $(f_n)_n$) bezeichnet. Eine solche existiert genau dann, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

Bsp.: Es seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume, $k: X\times Y\to\mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $\mu: \mathcal{B}(X)\to[0,\infty]$ ein Maß. Für $h\in\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B}(X),\mu)$ definiert man

$$Kh(y) := \int_X k(x,y)\,h(x)\,d\mu(x).$$

Dann ist $Kh: Y\to\mathbb{R}$ stetig und beschränkt.

Bew.: Sei $|k(x,y)|\le M \quad \forall (x,y)\in X\times Y$. Dann ist nach Bem. (8) zur Integraldefinition

$$|Kh(y)| \le \int_X |k(x,y)|\,|h(x)|\,d\mu(x) \le M\,\mu[|h|].$$

Sei $(y_n)_n$ eine Folge in Y mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wir setzen $f_n(x) := k(x,y_n)\cdot h(x) \longrightarrow k(x,y)\,h(x) =: f(x)$. Mit $|f_n| \le M\cdot|h| =: g$ ist eine integrierbare Majorante schnell gefunden und der Lebesguesche Konvergenzsatz ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \underbrace{k(x,y_n)\,h(x)}_{=f_n}\,d\mu(x) = \int_X \underbrace{k(x,y)\,h(x)}_{=f}\,d\mu(x),$$

also $\lim_{n\to\infty} Kh(y_n) = Kh(y)$, und das ist die Stetigkeit von Kh in einem beliebigen Punkt $y\in Y$.