## 2.5 Integration

### 2.5.1 Definitionen und einfache Folgerungen

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(X, \mathcal{A}) := \{f : X \to \mathbb{R},\ f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-elementar}\},$$
$$\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^+(X, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{E}(X, \mathcal{A}) : f \geq 0\},$$
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar}\},$$
$$\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A}) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : f \geq 0\}.$$

Def.: Für $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+(X, \mathcal{A})$ heißt

$$\mu[f] := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

das $(\mu\text{-})$ Integral der $\mathcal{A}$-elementaren Funktion $f$.

Bem.: (1) Die Schreibweise $\mu[f]$ ist nicht nur kurz, sondern betont auch die Auffassung des Integrals als ein lineares Funktional, ein Moment noch auf $\mathcal{E}^+$. Alt. Schreibweisen: $\int f \, d\mu$, $\int f(x) \, d\mu(x)$, ...

(2) $\mu[f]$ ist wohldefiniert. Sei $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$.

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \ldots$$

$\longrightarrow$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \chi_{B_j}\Big]$$ (22)

$$= \sum_{j=1}^{m} \mu\Big[\sum_{l=1}^{m} \beta_l \chi_{B_l} \cdot \chi_{B_j}\Big] = \sum_{j=1}^{m} \mu[\beta_j \chi_{B_j}] = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

Lemma 1: Für alle $A \in \mathcal{A}$, $\alpha \in [0,\infty)$ und $f, g \in \mathcal{E}^+$ gelten:

(1) $\mu[\chi_A] = \mu(A)$ (2) $\mu[\alpha f] = \alpha \mu[f]$

(3) $\mu[f+g] = \mu[f] + \mu[g]$ (4) $f \leq g \Rightarrow \mu[f] \leq \mu[g]$.

(Für (3), (4) betrachte man gemeinsame Verfeinerungen wie beim Bew. der Wohldefiniertheit.)

Für $f \in \mathcal{M}^+$ soll nun das Integral nach dem Maß $\mu$ erklärt werden als der Grenzwert

$$\mu[f] := \lim_{n\to\infty} \mu[f_n]$$

mit einer Folge $(f_n)_n$ $\mathcal{A}$-elementarer Funktionen, die aufsteigend gegen $f$ konvergieren. Dass eine solche Folge stets existiert, wissen wir aus Satz 3 im Abschnitt 2.4. Für die Wohldefiniertheit ist allerdings auch die Unabhängigkeit von der approximierenden Folge zu klären:

**Satz 1**: Es sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}^+$ mit $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gelten:

(1) Für $f \in \mathcal{E}^+$ mit $f \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ist $\mu[f] \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n]$.

(2) Ist $(g_n)_n$ eine weitere monoton steigende Folge in $\mathcal{E}^+$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$, so ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n] = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu[g_n]$.

Bem.: Wegen der Monotonievoraussetzung kann man überall in Satz 1 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\lim\limits_{n\to\infty}$ ersetzen.

Bew.: Einfach ist die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2), denn aus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ folgt $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \ge g_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Nach (1) gilt dann $\mu[g_m] \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n]$ $\forall m \in \mathbb{N}$ und somit $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mu[g_m] \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n]$. Genauso erhält man die umgekehrte Ungleichung.

Bew. von (1): Wir setzen $A := \{x \in X : f(x) > 0\}$. Da $(0,\infty) \in \overline{\mathcal{B}}$ und $f$ $\mathcal{A}$-messbar ist, gilt $A \in \mathcal{A}$. O.E. können wir $A \neq \emptyset$ annehmen (sonst ist $f \equiv 0$ und die Beh. trivial). Da $f$ nur endlich viele Werte annimmt, existieren

$$a := \min\{f(x) : x \in A\} \text{ und } b := \max\{f(x) : x \in A\}$$

und es gilt $0 < a \le b < \infty$. Nun seien $\varepsilon \in (0,a)$ und

$$A_n := \{x \in A : f_n(x) \ge f(x) - \varepsilon\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $f_n - f$ überall definiert und $\mathcal{A}$-messbar ist, gilt $A_n \in \mathcal{A}$, und aus $f_n \nearrow \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \ge f$ folgt $A_n \nearrow A$.

Fall 1: $\mu(A) = \infty$. Hier haben wir

$$f_n \ge (f - \varepsilon) \cdot \chi_{A_n} \ge (a - \varepsilon)\chi_{A_n}$$

und daher wegen Lemma 1, (1), (4) und der aufsteigenden Stetigkeit von Maßen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n] \ge (a-\varepsilon) \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = (a-\varepsilon) \cdot \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty.$$

Fall 2: $\mu(A) < \infty$. Hier müssen wir etwas genauer abschätzen:

$$f = f \cdot \chi_A = f\,\chi_{A\setminus A_n} + f \cdot \chi_{A_n} \le b \cdot \chi_{A\setminus A_n} + (f_n + \varepsilon)\chi_{A_n}$$

$$\overset{\text{Lemma}}{\underset{1}{\Longrightarrow}} \mu[f] \le b\,\mu(A \setminus A_n) + \mu[f_n] + \varepsilon\,\mu(A)$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich mit der absteigenden Stetigkeit von Maßen $(\mu(A\setminus A_n) \to 0)$

$$\mu[f] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n] + \varepsilon \cdot \mu(A)$$

und, da $\varepsilon \in (0,a)$ beliebig war,

$$\mu[f] \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu[f_n]. \qquad \square$$

**Def.**: (1) Es sei $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}^+(X, \mathcal{A})$ mit $f_n \nearrow f$. Wir definieren das $\mu$-Integral von $f$ als
$$\mu[f] := \lim_{n \to \infty} \mu[f_n]$$

(2) Wenn $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ist, so sind $f^{\pm} \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ und $f = f^+ - f^-$. Falls $\mu[f^+] < \infty$ ist oder $\mu[f^-] < \infty$, so heißt $f$ semiintegrierbar und
$$\mu[f] := \mu[f^+] - \mu[f^-] \quad (= \pm\infty, \text{ wenn } \mu[f^{\pm}] = \infty)$$
das $\mu$-Integral von $f$.

(3) Eine semiintegrierbare Funktion $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ heißt ($\mu$-) integrierbar, wenn $\mu[f] \in \mathbb{R}$.

(4) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) := \{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : f \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \}$.

Bem. zur Def.:

(1) Für $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ gelten:

(i) $f$ ist genau dann integrierbar, wenn $\mu[f] < \infty$,

(ii) $\mu[\alpha f] = \alpha \mu[f]$ (hierbei $\alpha \in [0, \infty)$ und $0 \cdot \infty = 0$),

(iii) $\mu[f + g] = \mu[f] + \mu[g]$ (ggf. mit $\infty + \infty = \infty$),

(iv) $f \leq g \Rightarrow \mu[f] \leq \mu[g]$.

((i) folgt unmittelbar aus der Definition. (ii)-(iv) ergeben sich aus Lemma 1, (2)-(4), durch Grenzübergang.)

(2) Für $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ sind äquivalent:

(i) $f$ ist integrierbar,

(ii) $\mu[f^+] < \infty$ und $\mu[f^-] < \infty$, d. h. $f^+$ und $f^-$ sind integrierbar,

(iii) $|f| = f^+ + f^-$ ist integrierbar

(iv) Es gibt eine integrierbare Funktion $g \geq |f|$.

(3) Für jede semiintegrierbare Funktion $f$ gilt

$$|\mu[f]| \leq \mu[|f|], \qquad \text{denn}$$

$$|\mu[f]| = |\mu[f^+] - \mu[f^-]| \leq \mu[f^+] + \mu[f^-] = \mu[|f|].$$

(4) $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Vektorraum und das $\mu$-Integral

$$\mu[\cdot] : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \mu[f]$$

ein monotones und lineares Funktional.

(Folgt aus Bem. 1, (ii) - (iv), und der Zerlegung $f = f^+ - f^-$.)

Bsp.: $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ sei das Zählmaß, definiert durch $\mu(A) = \# A$. Die Funktionen $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ sind hier gerade die Folgen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$. Jede dieser Folgen ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ - messbar. Statt wie üblich $(a_n)_n$ schreiben wir

→

$f = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \chi_{\{k\}}$ oder, etwas allgemeiner: $f = \sum_{k \in I} b_k \chi_{A_k}$ mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge $I$, Koeffizienten $b_k \in \overline{\mathbb{R}}$ und Teilmengen $A_k \subset \mathbb{N}$.

Die $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-elementaren Funktionen sind

$$\mathcal{E}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) = \{ \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{A_k} : n \in \mathbb{N}, b_k \in \mathbb{R}, A_k \subset \mathbb{N} \},$$

also gerade diejenigen Folgen reeller Zahlen, die nur endlich viele Werte annehmen, während

$$\mathcal{M}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) = \{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{\{k\}} : a_k \in \overline{\mathbb{R}} \},$$

das sind alle "numerischen Funktionen" $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Falls $|a_{n_0}| = \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ist, gilt für $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{\{k\}}$, dass

$$\mu[|f|] \geq \mu[\infty \chi_{\{n_0\}}] = \infty,$$

also dass $f$ nicht nach dem Zählmaß integrierbar ist. Andernfalls können wir für $f \geq 0$

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{\{k\}} \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{\{k\}} = f$$

als approximierende Folge von Treppenfktn. wählen. Hierfür ist

$$\mu[f_n] = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \mu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \mu[f].$$

Lassen wir die Voraussetzung $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{\{k\}} \geq 0$ fallen, so ist $f = f^+ - f^-$ mit $f^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm} \chi_{\{k\}}$ und

$$\mu[f^{\pm}] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}.$$

Für die Integrierbarkeit einer solchen "Funktion" $f$ wird gefordert, dass diese Reihen beide konvergieren, also dass $\mu[f] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.
(Lediglich bedingte Konvergenz einer Reihe bedeutet also nicht die Integrierbarkeit der entsprechenden Folge nach dem Zählmaß!)

Bezeichnung: Es sei $A(x)$ eine Aussage über $x \in X$. Wir sagen, $A(x)$ gilt $\mu$-fast überall (oder: für $\mu$-fast alle $x \in X$), wenn es eine $\mu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $\{x \in X : \neg A(x)\} \subset N$.

Bem.: (1) Häufig benutzte Abkürzung: $\mu$-f.ü.

(2) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig wie z. B. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$, so kann man etwas einfacher formulieren: $A(x)$ gilt $\mu$-f.ü., wenn $\{x \in X : \neg A(x)\}$ eine $\mu$-Nullmenge ist.

(3) Bsp.: $\lambda_1$-fast alle reellen Zahlen sind irrational (weil $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine $\lambda_1$-Nullmenge ist).

Satz 2: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$.

Dann gelten:

(1) Ist $f = 0$ $\mu$-f.ü., so gilt $\mu[f] = \mu[|f|] = 0$. Insbesondere ist $f$ integrierbar.

(2) $\mu[|f|] = 0$ impliziert $f = 0$ $\mu$-f.ü.

(3) Ist $f \leq g$ $\mu$-f.ü. und ($\mu[f^-] < \infty$ oder $\mu[g^+] < \infty$), so gilt $\mu[f] \leq \mu[g]$.

(4) Sind $f = g$ $\mu$-f.ü. und $f$ semiintegrierbar, so ist auch $g$ semiintegrierbar und es gilt $\mu[f] = \mu[g]$.

(5) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, so ist $f$ $\mu$-f.ü. endlich.

Bew.: (1) $f = 0$ $\mu$-f.ü. $\Rightarrow$ $|f| = 0$ $\mu$-f.ü. $\Rightarrow$ Für jede $\mathcal{A}$-elementare Funktion $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $0 \leq t \leq |f|$ und $\alpha_i > 0$ gilt $\mu(A_i) = 0$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ und daher $\mu[t] = 0$. Daher ist $\mu[|f|] = 0$. Wegen $|\mu[f]| \leq \mu[|f|]$ impliziert dies auch $\mu[f] = 0$.

(2) Wir schreiben $A := \{x \in X : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $A_n := \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Dann ist $\mu(A_n) = \mu[\chi_{A_n}] \leq n \cdot \mu[|f|] = 0$ und daher auch $\mu(A) = 0$.

(3) Zunächst sei $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Dann gelten überall $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$. Nach Bem. (1)

zur Def. folgen $\mu[f^+] \leq \mu[g^+]$ und $\mu[g^-] \leq \mu[f^-]$.
Nun zieht $\mu[g^+] < \infty$ (bzw. $\mu[f^-] < \infty$) nach sich, dass $\mu[f^+] < \infty$ (bzw. $\mu[g^-] < \infty$), also die Semi-integrierbarkeit beider Funktionen. In beiden Fällen haben wir

$$\mu[f] = \mu[f^+] - \mu[f^-] \leq \mu[g^+] - \mu[g^-] = \mu[g].$$

Nun sei $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$, so dass $\forall x \in N^c$ $f(x) \leq g(x)$. Dann erhalten wir

$$\mu[f] = \mu[f\chi_{N^c}] + \mu[f\chi_N] \underset{(1)}{=} \mu[f\chi_{N^c}]$$

nach dem Bisherigen $\leq \mu[g\chi_{N^c}] \underset{(1)}{=} \mu[g]$.

(4) folgt aus (3).

(5) Sei $N := \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$. Dann ist $\forall a \in \mathbb{R}^+$ $a \cdot \chi_N \leq |f|$ und folglich $a \cdot \mu(N) \leq \mu[|f|] < \infty$. Das ist nur möglich, wenn $\mu(N) = 0$. □

Bem. (Integral über Teilbereiche): Für $A \in \mathcal{A}$ und $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiert man $\int_A f \, d\mu := \mu[\chi_A f]$.

Es gelten: (1) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \, d\mu = 0$ (Satz 2, (1))

(2) $f > 0$ und $\int_A f \, d\mu = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ (Satz 2, (2)).

Satz 3: Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum und $T: X \to Y$ $\mathcal{A},\mathcal{C}$-messbar. Dann wird durch $\mu_T(C) := \mu(T^{-1}(C))$ ein Maß $\mu_T$ auf $\mathcal{C}$ definiert. Eine $\mathcal{C}$-messbare Funktion $f: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau $\mu_T$-integrierbar, wenn $f \circ T$ $\mu$-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt $\mu_T[f] = \mu[f \circ T]$.

Bew.: (1) $\mu_T(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

Sind $C_n \in \mathcal{C}$ paarweise disjunkt, so gilt dasselbe für die Urbilder $T^{-1}(C_n)$ und wir haben

$$\mu_T\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) = \mu\Big(T^{-1}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big)\Big) = \mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(C_n)\Big)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(C_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_T(C_n).$$

(2) Für $C \in \mathcal{C}$ ist

$$\chi_{T^{-1}(C)}(x) = 1 \iff x \in T^{-1}(C) \iff T(x) \in C \iff \chi_C(T(x)) = 1$$

und daher $\chi_{T^{-1}(C)} = \chi_C \circ T$, so dass $\mu_T[\chi_C] = \mu[\chi_C \circ T]$.

Für $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{C_i} \in \mathcal{E}^+(Y, \mathcal{C})$ folgt

$$\mu_T[t] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_T[\chi_{C_i}] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu[\chi_{C_i} \circ T] = \mu[t \circ T]$$

Nun sei $f \in \mathcal{M}^+(Y, \mathcal{C})$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}^+(Y, \mathcal{C})$ mit $f_n \nearrow f$. Dann ist per def.

$$\mu_T[f] = \lim_{n\to\infty} \mu_T[f_n] = \lim_{n\to\infty} \mu[f_n \circ T] = \mu[f \circ T].$$

Damit erhalten wir

$$f\in\mathcal{L}^1(Y,\mathcal{C},\mu_T) \iff f^\pm \in \mathcal{M}^+(Y,\mathcal{C}) \text{ und } \mu_T[f^\pm]<\infty$$

$$\iff f^\pm\circ T = (f\circ T)^\pm \in \mathcal{M}^+(X,\mathcal{A}) \text{ und } \mu[(f\circ T)^\pm]<\infty$$

$$\iff f\circ T\in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu).$$

Ferner gilt in diesem Fall

$$\mu_T[f] = \mu_T[f^+]-\mu_T[f^-] = \mu[(f\circ T)^+]-\mu[(f\circ T)^-]$$

$$= \mu[f\circ T] \qquad \square.$$

Def.: Das Maß $\mu_T$ aus Satz 3 wird als <u>das von $\mu$ mittels $T$ induzierte Maß</u> oder auch als <u>das Bildmaß von $\mu$ unter $T$</u> bezeichnet.

Bem.: Induzierte Maße spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle.