2.4 Messbare Funktionen

Zunächst einige Begriffe:

Def.: (1) Ein Paar $(X, \mathcal{A})$ bestehend aus einer Menge X und einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein <u>messbarer Raum</u> (auch: Messraum).

(2) Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt ein <u>Maßraum</u>.

(3) Ein Maßraum heißt endlich (σ-endlich, vollständig, ...), wenn $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ endlich (σ-endlich, ...) ist.

Def.: Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt <u>$\mathcal{A}, \mathcal{C}$-messbar</u>, wenn $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ für alle $C \in \mathcal{C}$, d.h. wenn $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Bsp.: (1) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ beliebig: Alle Funktionen $f : X \to Y$ sind $\mathcal{A}, \mathcal{C}$-messbar.

(2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$, $\{\{y\} : y \in Y\} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$. Dann

ist $f: X \to Y$ nur dann $\mathcal{A}, \mathcal{E}$-messbar, wenn f konstant ist.

Begründung von (2): Ist f $\mathcal{A}, \mathcal{E}$-messbar und $y_0 \in f(X)$, so ist $f^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset$, also $f^{-1}(\{y_0\}) = X$.

D.h.: Für alle $x \in X$ ist $f(x) = y_0$.

Die Verknüpfung messbarer Fktn. ist messbar:

Lemma 1: $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{E})$ und $(Z, \mathcal{D})$ seien messbare Räume. Die Funktionen $g: X \to Y$ und $f: Y \to Z$ seien $\mathcal{A}, \mathcal{E}$- bzw. $\mathcal{E}, \mathcal{D}$-messbar. Dann ist $f \circ g: X \to Z$ $\mathcal{A}, \mathcal{D}$-messbar.

Bew.: Für $D \in \mathcal{D}$ ist $f^{-1}(D) \in \mathcal{E}$ und daher $(f \circ g)^{-1}(D) = g^{-1}(f^{-1}(D)) \in \mathcal{A}$.

Auch zwischen messbaren Räumen gibt es strukturerhaltende Abbildungen:

Lemma 2: $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{E})$ seien messbare Räume, $f: X \to Y$ eine $\mathcal{A}, \mathcal{E}$-messbare Bijektion mit $\mathcal{E}, \mathcal{A}$-messbarer Inverser $f^{-1}: Y \to X$. Dann gelten:

(1) $f(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ und $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$.

(2) Ist $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0)$, so gilt $\mathcal{A} = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_0))$.

<u>Bew.</u>: (1) Die Messbarkeitsvoraussetzungen liefern

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A} \quad \text{und} \quad f(\mathcal{A}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E}.$$

Wenden wir f auf die erste Inklusion an, folgt

$$\mathcal{E} = f(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{E},$$

also $f(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. Vertauscht man jetzt die Rollen von f und f^{-1} bzw. von $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{E})$, so ergibt sich $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$.

(2) Wir haben

$$\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}_0) = f(f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_0))) \supset f(\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_0))),$$

letzteres, weil $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_0))$ eine σ-Algebra ist, die $f^{-1}(\mathcal{E}_0)$ enthält. Da f bijektiv ist, können wir fortfahren mit

$$\mathcal{E} \supset \ldots \supset \sigma(f(f^{-1}(\mathcal{E}_0))) = \sigma(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}.$$

Also gilt überall "=" und insbesondere $\mathcal{E} = f(\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_0)))$. Wenden wir f^{-1} an, folgt

$$\mathcal{A} \underset{(1)}{=} f^{-1}(\mathcal{E}) = f^{-1}(f(\ldots)) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_0)).$$

$\square$

Eine ähnliche Situation besteht in der Topologie:

Bem.: Sind (X,τ) und $(Y,\mathcal{S})$ topologische Räume und $f: X \to Y$ eine Funktion, so definiert man die Stetigkeit von f durch die Forderung $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \tau$ (Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen). Ist f zudem f bijektiv mit stetiger Inverser $f^{-1}: Y \to X$, so heißt f ein <u>Homöomorphismus</u> und man hat

$$f^{-1}(\mathcal{S}) = \tau \qquad \text{sowie} \qquad f(\tau) = \mathcal{S}.$$

Auch Erzeugendensysteme von τ bzw. $\mathcal{S}$, die man in der Topologie Subbasen nennt, werden von Homöomorphismen aufeinander abgebildet.

<u>Lemma</u> 3 (Kriterium für $\mathcal{A},\mathcal{C}$-messbarkeit): Es seien $(X,\mathcal{A})$ und $(Y,\mathcal{C})$ messbare Räume sowie $\mathcal{C}_0$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$. Dann ist $f: X \to Y$ bereits $\mathcal{A},\mathcal{C}$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{A}$.

<u>Bew.</u>: Sei $\mathcal{M} := \{C \in \mathcal{C} : f^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$. Nach Vor. ist $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{M}$ und für $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots \in \mathcal{M}$ gilt

- $f^{-1}(C_1 \setminus C_2) = f^{-1}(C_1) \setminus f^{-1}(C_2) \in \mathcal{A}$, d.h. $C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{M}$
- $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(C_n) \in \mathcal{A}$, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{M}$

sowie $Y \in \mathcal{M}$, da $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$. Also ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{C}_0$ enthält und sofort $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{M}$. $\square$

Folgerung: Es seien (X,τ) und $(Y,\mathcal{S})$ topologische Räume und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann gelten:

(1) Ist f stetig, so ist f auch $\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y)$-messbar.

(2) Ist f ein Homöomorphismus, so gelten $f(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(Y)$, $\mathcal{B}(X) = f^{-1}(\mathcal{B}(Y))$ und für jedes Erzeugendensystem $\mathcal{E}_0$ von $\mathcal{B}(Y)$ ist $f^{-1}(\mathcal{E}_0)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(X)$.

Bew.: (1) f stetig $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \tau \subset \sigma(\tau) = \mathcal{B}(X)$. Da $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(Y)$, folgt die Beh. aus dem Kriterium.
(2) Nach (1) ist f $\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y)$- und f^{-1} $\mathcal{B}(Y),\mathcal{B}(X)$-messbar, daher ergeben sich die Beh. aus Lemma 2.

Im Folgenden sollen auch solche Funktionen zugelassen werden, die nach $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ abbilden; diese nennt man "<u>numerische Funktionen</u>".
Um auf $\overline{\mathbb{R}}$ über eine Borel-σ-Algebra verfügen zu können, definieren wir die Topologie $\overline{\tau} \subset \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ durch

$$\overline{\tau} := \{\Omega, [-\infty, b) \cup \Omega, \Omega \cup (a,\infty], [-\infty,b) \cup \Omega \cup (a,\infty] : a,b \in \mathbb{R}, \Omega \in \tau\},$$

wobei τ die Standard-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

$\overline{\tau}$ ist auf folgende Weise metrisierbar: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, streng monoton steigend und beschränkt, so dass

- f eine stetige Inverse $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ besitzt und
- die Grenzwerte $f(\pm\infty) := \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ existieren.

Dann definiert man auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Metrik

$$d_f : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,\infty), \quad d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|.$$

$\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt offen bezüglich d_f, wenn gilt

$$\forall x \in \Omega \ \exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } U_\varepsilon(x) := \{y \in \overline{\mathbb{R}} : d_f(x,y) < \varepsilon\} \subset \Omega.$$

Das System der bezüglich d_f offenen Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ ist gerade $\overline{\tau}$. Diesen Zusammenhang möchte ich Ihnen in einem der nächsten Tutorien erklären.

Lemma 4: Für die Borel-σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gelten:

(1) $\overline{\mathcal{B}} = \sigma(\mathcal{J}_1)$ für $\mathcal{J}_1 = \{[-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$.

(2) Weitere Erzeugendensysteme sind

$\mathcal{J} := \{[a,b) : -\infty \le a \le b < \infty\}$, $\mathcal{J}_2 := \{[a,\infty] : a \in \mathbb{R}\}$,

$\mathcal{J}_3 := \{(a,\infty] : a \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{J}_4 := \{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

(3) $\overline{\mathcal{B}} = \{B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty,\infty\} : B \in \mathcal{B}\} (=: \mathcal{A})$

Bew.: (1) Da $\mathcal{J}_1 \subset \overline{\tau}$ ist $\sigma(\mathcal{J}_1) \subset \overline{\mathcal{B}}$.

Da $[a,b) = [-\infty, b) \setminus [-\infty, a) \in \sigma(\mathcal{J}_1)$ ist gilt

$\mathcal{J} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\} \subset \sigma(\mathcal{J}_1)$ und daher

$\tau \subset \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{J}_1)$. Damit sind auch $[-\infty, a] = \ldots$

$[-\infty,b)\setminus(a,b)\in\sigma(\mathcal{S}_1)$ sowie $(a,\infty]=[-\infty,a]^c\in\sigma(\mathcal{S}_1)$

Hieraus folgen $\overline{\mathcal{E}}\in\sigma(\mathcal{S}_1)$ und $\overline{\mathcal{B}}=\sigma(\overline{\mathcal{E}})\subset\sigma(\mathcal{S}_1)$.

(2) Klar für $\mathcal{J}$, da $\mathcal{S}_1\subset\mathcal{J}\subset\overline{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{S}_1=\mathcal{S}_2^c\subset\sigma(\mathcal{S}_2)$; $\mathcal{S}_3=-\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_4=-\mathcal{S}_2$ (Lemma 3 bzw. die 2. Folgerung daraus, da $f:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$, $x\mapsto f(x)=-x$ stetig mit stetiger Inverser ist.)

(3) $\mathcal{E}\subset\overline{\mathcal{E}}$ impliziert $\mathcal{B}\subset\overline{\mathcal{B}}$. Ferner ist $\{-\infty\}=[-\infty,a)\setminus\mathbb{R}\in\overline{\mathcal{B}}$, entsprechend $\{\infty\}\subset\overline{\mathcal{B}}$ und damit $\mathcal{A}\subset\overline{\mathcal{B}}$. Umgekehrt ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{S}_1$ enthält.

Def.: Sei $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine $\mathcal{A},\overline{\mathcal{B}}$-messbare Funktion $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ heißt $\mathcal{A}$-messbar.

Bem.: Eine Funktion $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\{x\in X: f(x)\leq r\}=f^{-1}([-\infty,r])\in\mathcal{A}$ $\forall r\in\mathbb{R}$

(ii) $f^{-1}([-\infty,r))\in\mathcal{A}$ $\forall r\in\mathbb{R}$, (iii) $f^{-1}((r,\infty])\in\mathcal{A}$ $\forall r\in\mathbb{R}$

(iv) $f^{-1}([r,\infty])\in\mathcal{A}$ $\forall r\in\mathbb{R}$.

Hierbei kann man "$\forall r\in\mathbb{R}$" durch "$\forall r\in\mathbb{Q}$" ersetzen.

Bew.: Folgt aus dem Kriterium in Lemma 3 zusammen mit den in Lemma 4 genannten Erzeugendensystemen. Zusatz: z.B. aus $[-\infty,r)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\infty,q_n)$ mit einer Folge $(q_n)_n$ in $\mathbb{Q}$, für die $q_n\nearrow r$.

Satz 1: Es seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind auch die folgenden Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:

(i) αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ (hierbei $\alpha \cdot (\pm\infty) = \operatorname{sign}(\alpha) \cdot (\pm 1) \cdot \infty$ für $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und $0 \cdot (\pm\infty) = 0$);

(ii) $|f|^\beta$ für $\beta > 0$ (hierbei $|\pm\infty|^\beta = \infty$);

(iii) $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$, insbesondere auch $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = \max(-f, 0)$,

(iv) $f + g$, falls überall auf X definiert, und

(v) $f \cdot g$ (mit $(\pm\infty)(\pm\infty) = \infty$, $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$ und $0 \cdot \infty = 0$).

Bew.: (i) und (ii): Die Abbildungen $t \mapsto \alpha t$ (mit $\alpha(\pm\infty) = \operatorname{sign}(\alpha)(\pm 1)\infty$ für $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und $0 \cdot \infty = 0$) und $t \mapsto |t|^\beta$ (mit $\beta > 0$ und $|\pm\infty|^\beta = \infty$) sind stetig von $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, also $\overline{\mathcal{B}}$-messbar nach Folgerung (1) aus Lemma 3. Die $\mathcal{A}$-Messbarkeit der Verknüpfung gilt nach Lemma 1.

(iii) Es gilt $\{x \in X : \max(f(x), g(x)) < r\}$

$$= \{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : g(x) < r\} \in \mathcal{A} \quad \text{und}$$

$\{x \in X : \min(f(x), g(x)) < r\}$

$$= \{x \in X : f(x) < r\} \cup \{x \in X : g(x) < r\} \in \mathcal{A}.$$

Jetzt die vorangehende Bem..

(iv) Es ist $f(x)+g(x)<r$

$\iff \exists\, q\in\mathbb{Q}$, so dass $f(x)<q$ und $g(x)<r-q$

und daher $\{x\in X: f(x)+g(x)<r\}$

$$=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x\in X: f(x)<q\}\cap\{x\in X: g(x)<r-q\}\in\mathcal{A}.$$

(v) $\{x\in X: f(x)\cdot g(x)<r\}=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$, wobei (o.E. $r>0$)

$M_1:=\{x\in X: f(x)\cdot g(x)=-\infty\}=M_{1,1}\cup M_{12}$ mit

$M_{11}:=\{x\in X: f(x)=-\infty\}\cap\{x\in X: g(x)>0\}\in\mathcal{A}$

(und $M_{1,2}=\{x\in X: f(x)>0 \wedge g(x)=-\infty\}\in\mathcal{A}$);

$M_2:=\{x\in X: -\infty<f(x)g(x)<0\}=M_{2,1}\cup M_{22}$ mit

$M_{21}:=\{x\in X: -\infty<f(x)<0\}\cap\{x\in X: 0<g(x)<\infty\}\in\mathcal{A}$;

$M_3:=\{x\in X: f(x)\cdot g(x)=0\}=\{x\in X: f(x)=0\}\cup\{x\in X: g(x)=0\}\in\mathcal{A}$

und

$M_4=\{x\in X: 0<f(x)g(x)<r\}=M_{4,1}\cup M_{42}$ mit

$M_{4,1}=\{x\in X: 0<f(x)g(x)<r \wedge f(x)>0\}$

$$=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^+}\{x\in X: 0<f(x)<q\}\cap\{x\in X: 0<g(x)<\tfrac{r}{q}\}\in\mathcal{A}$$

und $M_{4,2}=\{x\in X: 0<f(x)g(x)<r \wedge f(x)<0\}$ genauso

zu behandeln ist. $\square$

Satz 2: Es seien $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum und, für $n\in\mathbb{N}$, $f_n : X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind auch die Funktionen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\,,\quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\,,\quad \limsup_{n\to\infty} f_n \text{ und } \liminf_{n\to\infty} f_n$$

$\mathcal{A}$-messbar. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert, ist auch dieser $\mathcal{A}$-messbar.

Bew.: Es ist

$$\{x\in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\le r\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_n(x)\le r\}\in\mathcal{A} \quad\text{und}$$

$$\{x\in X : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\ge r\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x\in X : f_n(x)\ge r\}\in\mathcal{A}.$$

Per Def. ist $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n} f_k(x)$, und die Folge $g_n(x) = \sup\limits_{k\ge n} f_k(x)$ ist monoton fallend, so dass

$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sup\limits_{k\ge n} f_k(x)$. Also ist $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar und ebenso der $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$.

Zusatz: Wenn der $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ existiert, stimmt er mit $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ überein und ist daher nach dem Vorhergehenden $\mathcal{A}$-messbar.

Def.: Eine Funktion der Form $t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \subset X$ paarweise disjunkt heißt eine <u>Treppenfunktion</u> oder <u>elementare Funktion</u>. Ist $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sind alle $A_i \in \mathcal{A}$, so nennt man t eine <u>$\mathcal{A}$-elementare Funktion</u>.

<u>Satz</u> 3: Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zu jeder $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $f: X \to [0, \infty]$ existiert eine Folge $(f_n)_n$ $\mathcal{A}$-elementarer Funktionen, so dass $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

<u>Bew.</u>: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$ definieren wir

$$A_{nk} := \{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Da f $\mathcal{A}$-messbar ist, gilt $A_{nk} \in \mathcal{A}$. Ferner sind bei festem n die A_{nk} (mit $1 \leq k \leq n \cdot 2^n$) paarweise disjunkt. Weiter setzen wir

$$B_n := X \setminus \sum_{k=1}^{n2^n} A_{nk} \in \mathcal{A} \qquad \text{und}$$

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_{nk}} + n \cdot \chi_{B_n} .$$

Die f_n sind nichtnegative $\mathcal{A}$-elementare Funktionen, und es gilt $f_n \leq f$. Wir zeigen:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \leq f_{n+1}$.

Zur Begründung seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ fixiert.

(i) Ist $f(x) \geq n+1$, so ist $f_n(x) = n$ und $f_{n+1}(x) = n+1$.

(ii) Ist $n \leq f(x) \leq f_{n+1}$, so ist $f_n(x) = n$ und

$$f_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}} \text{ für ein } j > 2^{n+1} \cdot f(x) \geq n \cdot 2^{n+1},$$

also $f_{n+1}(x) \geq n$.

(iii) $f(x) < n$. Dann ist

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}, \text{ wobei } k \text{ durch } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \text{ festgelegt ist,}$$

$$\text{und } f_{n+1}(x) = \frac{j-1}{2^{n+1}} \quad \text{"} \quad j \quad \text{"} \quad \frac{j-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{j}{2^{n+1}} \quad \text{"} \quad \text{"},$$

Hieraus folgt

$$\frac{j}{2^{n+1}} > \frac{k-1}{2^n} \implies j > 2k-2 \implies j \geq 2k-1$$

und weiter

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq \frac{j-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x). \implies \text{Beh.}$$

Nun gilt offenbar

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{falls } f(x) \leq n,$$

und $f_n(x) = n$, falls $f(x) \geq n$. Hieraus folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$.) Falls $M > 0$ existiert, so dass $f_M(x) \leq M$ $\forall x \in X$, so gilt $\forall n \geq M$:

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in X,$$

und das ist die gleichmäßige Konvergenz. $\square$

<u>Folgerung</u> Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{F}$ ein System von Funktionen $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $f: X \to \mathbb{R}$), für das gilt:

(1) $\chi_A \in \mathcal{F}$ $\forall A \in \mathcal{A}$,

(2) $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha f + \beta g$ definiert $\Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$

(3) $f_n \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $f: X \to \mathbb{R}$) $\Rightarrow f \in \mathcal{F}$.

Dann enthält $\mathcal{F}$ alle $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $f: X \to \mathbb{R}$).

<u>Bew.</u>: Aus (i) und (ii) folgt: $\mathcal{F}$ enthält alle $\mathcal{A}$-elementaren Funktionen. Nimmt man (iii) hinzu, so ergibt der Satz 3, dass $\mathcal{F}$ alle nicht-negativen messbaren Funktionen enthält. Ist nun $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar, so zerlegen wir $f = f^+ - f^-$, wobei $f^\pm$ nicht-negativ und $\mathcal{A}$-messbar sind, sonst $f^\pm \in \mathcal{F}$. Nochmal (ii) ergibt $f \in \mathcal{F}$. $\square$