2.3.3 Das Lebesgue-Maß. Vollständigkeit und Beziehung zur Borel-σ-Algebra $\mathbb{B}_n$

Def. (Lebesgue-σ-Algebra und Lebesgue-Maß)

Es sei λ_n das Lebesgue-Prämaß auf dem Ring

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} Q_k : N \in \mathbb{N},\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)} \right\}$$

der endlichen Quadersummen im $\mathbb{R}^n$ und

$$\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty],\ E \mapsto \lambda_n^*(E) = \inf\left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| : E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)} \right\}$$

das entsprechende äußere Maß.

(1) Die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\lambda_n^*}$ der λ_n^*-messbaren Mengen heißt die <u>Lebesgue-σ-Algebra</u>. Sie wird mit $\mathcal{L}_n$ bezeichnet und ihre Elemente werden <u>Lebesgue-messbare</u> (oder kurz: Lebesgue-) <u>Mengen</u> genannt.

(2) Die Einschränkung $\lambda_n^*|_{\mathcal{L}_n} =: \lambda_n$ heißt das <u>Lebesgue-Maß</u> (auf $\mathcal{L}_n$ oder – ungenau aber kurz – auf dem $\mathbb{R}^n$).

Folgerung (aus der Def., dem Fortsetzungssatz von Carathéodory und $\mathbb{B}_n = \sigma(\mathcal{Q}^{(n)})$, d.i. Satz 5 im Abschnitt 2.1): $\mathbb{B}_n \subset \mathcal{L}_n$.

Def. (Nullmengen und Vollständigkeit eines Maßes): 4

Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$.

(1) $N \in \mathcal{A}$ heißt eine <u>μ-Nullmenge</u>, wenn $\mu(N)=0$.

λ_n-Nullmengen werden als <u>Lebesgue-Nullmengen</u> bezeichnet.

(2) μ heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Teilmenge einer μ-Nullmenge zu $\mathcal{A}$ gehört.

Lemma 1: Ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{P}(X)$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen und $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*} : \mathcal{A}^* \to [0,\infty]$, so ist μ vollständig.

Bew.: Sei $N \in \mathcal{A}^*$ mit $\mu(N)=0$ und $N' \subset N$. Dann ist aufgrund der Monotonie eines äußeren Maßes

$$0 \le \mu^*(N') \le \mu^*(N) = \mu(N) = 0 \;\rightsquigarrow\; \mu^*(N') = 0.$$

Nach Bem. (3) zur Definition der μ^*-Meßbarkeit ist dann auch N' μ^*-messbar, d.h. es gilt $N' \in \mathcal{A}^*$.

Folgerung: $\lambda_n : \mathcal{L}_n \to [0,\infty]$ ist vollständig.

Lemma 2: Genau dann ist $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists (Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{Q}^{(n)} : N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \text{ und } \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon. \quad (*)$$

Bew.: Die angegebene Bedingung ist äquivalent zu

$$\lambda_n^*(N) = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| : N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\} = 0$$

Ist dies erfüllt, so ist $N \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda_n(N) = 0$, d.h. N ist eine Lebesgue-Nullmenge. Umgekehrt: Ist $N \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda_n(N) = 0$, so ist auch $\lambda_n^*(N) = 0$ und damit gilt (*).

Bem.: (1) Es gelten $\mathcal{B}_n \subsetneqq \mathcal{L}_n \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiele für $\neq$ sind nicht trivial, für ihre Konstruktion benötigt man das Auswahlaxiom.

Für $\mathcal{B}_n \neq \mathcal{L}_n$: Hewitt-Stromberg, Real and Abstract Analysis, Ex. (10.54); für $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$: Halmos, Measure Theory, § 16.

(2) Aus mengentheoretischer Sicht ist <u>$\mathcal{B}_n$</u> sogar <u>sehr viel kleiner als $\mathcal{L}_n$</u>. Genauer:

Für Mengen A und B setzt man

$$A \sim B \; (A \hookrightarrow B) \iff \exists \varphi : A \to B,\ \varphi \text{ ist bijektiv (injektiv)}$$

$A \sim B$ definiert eine Äquivalenzrelation.

Sprechweisen: Für $A \sim B$: A und B sind gleich mächtig. Für $A \hookrightarrow B$: A ist nicht mächtiger als B.

Damit gelten: $\underline{\mathbb{B}_n \sim \mathbb{R} \not\sim \mathcal{P}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{L}_n}$.

Das Argument sei für $n=1$ skizziert:

(i) $\mathbb{B} = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}})$ für $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$ und $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{Q}^2$ ist abzählbar.

Es gilt der Satz: Ist $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}$, so ist auch $\sigma(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(Halmos, a.a.O., § 5 Theor. C und Ex. 9).

Also ist $\mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{R}$ und wg. $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{B}$ auch $\mathbb{B} \sim \mathbb{R}$.

(ii) Es gibt keine surjektive Abbildung $\varphi: X \to \mathcal{P}(X)$ von einer beliebigen Menge X auf ihre Potenzmenge (Cantor). Falls doch, existiert ein $x_0 \in X$, so dass $\varphi(x_0) = \{x \in X : x \notin \varphi(x)\}$. Dann ist aber nicht entscheidbar, ob $x_0 \in \varphi(x_0)$.

(iii) $\mathcal{L}_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist klar, verwende die Einbettung.

Umgekehrt: Sei C die Cantor-Menge aus Aufg. 1. Dann ist $C \in \mathbb{B}_1 \subset \mathcal{L}_1$, ersteres, da C abgeschlossen ist. Da $\lambda_1(C) = 0$ gilt, ist wegen der Vollständigkeit von $\lambda_1 : \mathcal{L}_1 \to [0,\infty]$ auch $\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{L}_1$. Nun kann man C surjektiv auf $[0,1]$ (und dann auch auf $\mathbb{R}$) abbilden mit

$F: C \to [0,1]$, $F\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{2^k}$

(Cantor-Lebesgue-Funktion, diese ist sogar stetig), was eine surjektive Abbildung $G: \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ nach sich zieht. Als Nebenprodukt erhalten wir

(3) $\lambda_n|_{\mathcal{B}_n}: \mathcal{B}_n \to [0,\infty]$ ist nicht vollständig.

Dass es der Borel-σ-Algebra – abgesehen von den unzähligen Teilmengen von Nullmengen – an nichts mangelt, zeigt der folgende

Approximationssatz: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(1) $A \in \mathcal{L}_n$,

(2) $\forall \varepsilon > 0$ existieren offene Mengen $\Omega_\varepsilon \supset A$ und abgeschlossene Mengen $A_\varepsilon \subset A$, so dass $\lambda_n(\Omega_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < 2\varepsilon$.

(3) Es existieren $F, G \in \mathcal{B}_n$, so dass $F \subset A \subset G$ und $\lambda_n(G \setminus F) = 0$.

Falls in (3) $\lambda_n(G) < \infty$ ist, hat man $\lambda_n(F) = \lambda_n(A) = \lambda_n(G)$.

Bew.: (1) $\Rightarrow$ (2). Zunächst sei zusätzlich $\lambda_n(A)<\infty$ angenommen. Dann gibt es zu $\varepsilon>0$ eine Folge $(Q_k)_k$ in $\mathcal{Q}^{(n)}$, so dass $A\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}}|Q_k|<\lambda_n(A)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Zu allen Q_k wählen wir <u>offene</u> Quader R_k, so dass $Q_k\subset R_k$ und $|R_k|<|Q_k|+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Dann ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k$ offen, $A\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}}|R_k|\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}|Q_k|+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}<\lambda_n(A)+\varepsilon$. Wir setzen $\Omega_\varepsilon:=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k$ und haben $\lambda_n(\Omega_\varepsilon\setminus A)<\varepsilon$.

Nun sei auf die zusätzliche Voraussetzung $\lambda_n(A)<\infty$ verzichtet. Wir zerlegen

$$A=\sum_{N\in\mathbb{N}} A_N \quad \text{mit } A_1=A\cap B_1(0) \text{ und, für } N\geq 2$$

$$A_N=A\cap(B_N(0)\setminus B_{N-1}(0)).$$

Dann gibt es nach dem bereits gezeigten zu $\varepsilon>0$ offene Mengen $\Omega_{N,\varepsilon}\subset\mathbb{R}^n$ mit $A_N\subset\Omega_{N,\varepsilon}$ und

$$\lambda_n(\Omega_{N,\varepsilon}\setminus A)\leq\lambda_n(\Omega_{N,\varepsilon}\setminus A_N)<\frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Wählen wir $\Omega_\varepsilon:=\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\Omega_{N,\varepsilon}$, so ist $A\subset\Omega_\varepsilon$ und Ω_ε offen sowie

$$\lambda_n(\Omega_\varepsilon\setminus A)\leq\sum_{N\in\mathbb{N}}\lambda_n(\Omega_{N,\varepsilon}\setminus A_N)<\sum_{N\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon}{2^N}=\varepsilon.$$

Jetzt wenden wir dieses Ergebnis auf A^c an.

Dann gibt es zu $\varepsilon>0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $A^c \subset U_\varepsilon$ und $\lambda_n(U_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon$. Setzen wir $A_\varepsilon := U_\varepsilon^c$, so ist A_ε abgeschlossen, $A_\varepsilon \subset A$ sowie

$$A \setminus A_\varepsilon = A \cap A_\varepsilon^c = A \cap U_\varepsilon = U_\varepsilon \setminus A$$

und daher $\lambda_n(A \setminus A_\varepsilon) = \lambda_n(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$.

Zusammenfassend erhalten wir $A_\varepsilon \subset A \subset \Omega_\varepsilon$ und

$$\lambda_n(\Omega_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) = \lambda_n(\Omega_\varepsilon \setminus A) + \lambda_n(A \setminus A_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Wir setzen $G := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{k}}$ und $F := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{k}}$.

Dann ist $F \subset A \subset G$, $F, G \in \mathcal{B}_n$ und

$$\lambda_n(G \setminus F) \leq \lambda_n(\Omega_{\frac{1}{k}} \setminus A_{\frac{1}{k}}) < \frac{2}{k}.$$

Gilt für alle $k\in\mathbb{N}$, also ist $\lambda_n(G \setminus F) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Aus $G \setminus F \in \mathcal{B}_n$ mit $\lambda_n(G\setminus F) = 0$ und $A \setminus F \subset G \setminus F$ ergibt sich wegen der Vollständigkeit von λ_n, dass $A \setminus F \in \mathcal{L}_n$. Dann ist auch $A = (A\setminus F) + F \in \mathcal{L}_n$

Zusatz: Aus $F \subset A \subset G$ folgt $\lambda_n(F) \leq \lambda_n(A) \leq \lambda_n(G)$.
Da wegen $\lambda_n(G) < \infty$ gilt, dass $0 = \lambda_n(G \setminus F) = \lambda_n(G) - \lambda_n(F)$, sind alle gleich.

$\square$

Folgerung: Für jedes $A \in \mathcal{L}_n$ gilt

$$\lambda_n(A) \underset{(1)}{=} \inf\{\lambda_n(\Omega) : A \subset \Omega,\ \Omega \text{ offen}\}$$
$$\underset{(2)}{=} \sup\{\lambda_n(F) : F \subset A,\ F \text{ abgeschlossen}\}$$
$$\underset{(3)}{=} \sup\{\lambda_n(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

Bew.: (1) und (2) folgen unmittelbar aus dem Approximationssatz. Für (3) setzen wir $A_N := A \cap B_N(0)$. Dann gibt es nach (2) eine abgeschlossene Menge $F_N \subset A_N$ mit $\lambda_n(A_N \setminus F_N) \leq \frac{1}{N}$. F_N ist beschränkt und also kompakt. Bilden wir $\tilde{F}_N := \bigcup_{k=1}^{N} F_k$, bleiben all diese Eigenschaften erhalten und beide Mengenfolgen $(A_N)_N$ und $(\tilde{F}_N)_N$ sind aufsteigend. Mit der aufsteigenden Stetigkeit von Maßen folgt $\lambda_n(A) = \lim_{N\to\infty} \lambda_n(A_N) = \lim_{N\to\infty} \lambda_n(\tilde{F}_N)$.

Def.: Es sei (X,τ) ein topologischer Raum, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, die $\mathcal{B}(X)$ umfasst, und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß. Dann heißt μ

- <u>von außen regulär</u>, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(\Omega) : A \subset \Omega \in \tau\},$$

- <u>von innen regulär</u>, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$

$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ kompakt}\}$ und

- <u>regulär</u>, wenn μ von innen und außen regulär ist.

Aufgrund der Folgerung aus dem Approximationssatz ist das Lebesgue-Maß λ_n <u>regulär</u>.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Lebesgue-Maß und dem Jordanschen Inhalt aus Kap. 1 ?

<u>Satz</u> 3: Es sei $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ das Mengensystem der Jordanbereiche im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{J}_n$ ein $\cap$-System (kein Ring!), es gelten $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{B}_n$ und $\sigma(\mathcal{J}_n) = \mathcal{B}_n$. Ferner ist für alle $J \in \mathcal{J}_n$ $\lambda_n(J) = |J|$, d. h. der Jordansche Inhalt ist die Einschränkung von λ_n auf $\mathcal{J}_n$.

<u>Bew.</u>: Sind $J_{1,2} \in \mathcal{J}_n$, so ist $J_1 \cap J_2$ kompakt und $\partial(J_1 \cap J_2) \subset \partial J_1 \cup \partial J_2$, also eine Jordan-Nullmenge. Damit ist $\mathcal{J}_n$ ein $\cap$-System. Da $J_1 \setminus J_2$ i. Allg. nicht kompakt ist, ist $\mathcal{J}_n$ kein Ring.

Da Kompakta abgeschlossen sind, gilt $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{B}_n$ und folglich auch $\sigma(\mathcal{J}_n) \subset \mathcal{B}_n$. Die andere Inklusion ergibt sich aus

$$\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i - \tfrac{1}{k}] \in \sigma(\mathcal{J}_n),$$

was $\mathcal{Q}^{(n)} \subset \sigma(\mathcal{J}_n)$ bedeutet und $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Q}^{(n)}) \subset \sigma(\mathcal{J}_n)$ nach sich zieht.

Aufgrund der 'Kompressionseigenschaft' des Jordanschen Inhalts (Bem. (3) zu dessen Definition) ist für jeden Jordanbereich $J \subset \mathbb{R}^n$

$$|J| = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{N} |Q_k| : N\in\mathbb{N},\ J \subset \overline{\bigcup_{1\le k\le N} Q_k},\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\Big\}$$

$$= \inf\Big\{\sum_{k=1}^{N} |R_k| : N\in\mathbb{N},\ J \subset \bigcup_{1\le k\le N} R_k,\ R_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\Big\} \quad \begin{pmatrix} Q_k \subset R_k \\ |R_k| \le |Q_k| + \frac{\varepsilon}{N} \end{pmatrix}$$

$$\ge \inf\Big\{\sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| : J \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\Big\} = \lambda_n(J).$$

Andererseits haben wir (laut derselben Bem. (3))

$$|J| = \sup\Big\{\sum_{k=1}^{N} |Q_k| : N\in\mathbb{N},\ \overline{\sum_{1\le k\le N} Q_k} \subset J,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)}\Big\}$$

$$\le \sup\{\lambda_n(K) : K \subset J,\ K \text{ kompakt}\} = \lambda_n(J),$$

letzteres nach der Folgerung aus dem Approximationssatz. $\square$.

Diesen Zusammenhang können wir verwenden, um die Invarianzeigenschaften des Jordanschen Inhalts auf das Lebesgue-Maß zu verallgemeinern:

<u>Satz</u> 4: Es seien A eine $n\times n$-Matrix, $b\in\mathbb{R}^n$ und

$$T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n,\quad x\longmapsto Tx=Ax+b$$

eine affin-lineare Transformation. Dann ist für jede Menge $M\in\mathcal{L}_n$ auch $TM\in\mathcal{L}_n$ und im Fall $\lambda_n(M)<\infty$ gilt $\lambda_n(TM)=|\det(A)|\,\lambda_n(M)$. Insbes. ist λ_n translations- und rotationsinvariant.

<u>Bw.</u>: (1) Im Fall $\det(A)=0$ ist TM in einem $n-1$-dim. affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten. Dann ist für jeden Quader $Q\subset\mathbb{R}^n$ $TM\cap Q$ eine Jordan-Nullmenge (als Graph einer auf einer Seitenfläche von Q definierten ~~und~~ affin-linearen und daher stetigen Funktion). Hieraus folgt, dass $TM\cap Q$ und (wg. der aufsteigenden Stetigkeit des Lebesgue-Maßes) auch TM Lebesgue-Nullmengen sind. Also gilt $TM\in\mathcal{L}_n$ und $\lambda_n(TM)=0=\det(A)\cdot\lambda_n(M)$, sofern $\lambda_n(M)<\infty$.

Im folgenden sei also stets $\det(A)\neq 0$.

(2) Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass es orthogonale Matrizen O_1, O_2 und eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $\neq 0$ gibt, so das

$$A = O_1 D O_2 .$$ [1)]

Aus Aufg. 3 und Satz 5 in Abschnitt 1.3 wissen wir daher, dass für jeden Jordanbereich $J \in \mathbb{R}^n$ auch TJ ein Jordanbereich ist und dass

$$|TJ| = |\det(A)| \cdot |J| .$$

(3) Mit $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ y \mapsto Sy = A^{-1}(y-b)$ besitzt T eine (stetige) Inverse, so dass

$$\mathcal{A} := \{ M \in \mathcal{L}_n : TM \in \mathcal{L}_n \} = \{ M \in \mathcal{L}_n : S^{-1} M \in \mathcal{L}_n \}$$

eine σ-Algebra ist (Aufg. 17 (b)), die nach (2) die Jordanbereiche enthält. Da $\sigma(\mathcal{J}_n) = \mathcal{B}_n$ (Satz 3), gilt $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}$.

(4) Für $B \in \mathcal{B}_n$ definieren wir

$$\mu(B) := \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \lambda_n(TB) .$$

Dann ist $\mu : \mathcal{B}_n \to [0, \infty]$ ein Maß, $\mu|_{\mathcal{J}_n}$ ist σ-endlich und auf dem $\cap$-System $\mathcal{J}_n$ stimmt μ nach (2) mit λ_n überein. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maßerweiterungen gilt also $\mu = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$.

---

1) Auf S. 62, der letzten dieses Abschnitts habe ich notiert, wie diese Aussage aus dem Satz über die Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen folgt.

(5). Ist N eine λ_n-Nullmenge, so gibt es nach dem Approximationssatz ein $B_0 \in \mathfrak{B}_n$ mit $N \subset B_0$ und $\lambda_n(B_0)=0$. 60
Nach (4) ist $\lambda_n(TB_0)=0$. Daher ist wegen $TN \subset TB_0$ aufgrund der Vollständigkeit von λ_n auch $TN \in \mathcal{L}_n$. Damit ist jede Menge $M = B + N$ mit $B \in \mathfrak{B}_n$ und einer Lebesgue-Nullmenge N in $\mathcal{A}$. Das wiederum bedeutet (nochmal A.-Satz!) $\mathcal{A} = \mathcal{L}_n$. $\square$

Ebenso wie zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes können wir den Maßerweiterungssatz verwenden, um das Lebesgue-Stieltjes-Prämaß

$$\mu_F : \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mapsto \mu_F\Big(\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i)\Big) := \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i),$$

definiert auf dem Ring

$$\mathcal{R} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i \le b_i \Big\},$$

zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortzusetzen, die $\mathfrak{B}_1$ enthält. (Hierbei: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und linksseitig stetig.) Dazu definiert man das <u>äußere Lebesgue-Stieltjes-Maß</u> $\mu_F^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_F^*(E) := \inf \Big\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} F(b_n) - F(a_n) : E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n),\ a_n \le b_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Die Einschränkung von μ_F^* auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_F^*}$ der μ_F^*-messbaren Mengen heißt das

Lebesgue-Stieltjes-Maß zur Verteilungsfunktion F.

Im Gegensatz zum Lebesgue-Maß können hier einelementige Mengen ein positives Maß haben, denn aufgrund der absteigenden Stetigkeit von Maßen ist

$$\mu_F(\{x\}) = \mu_F\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[x,x+\tfrac{1}{n})\Big) = \lim_{n\to\infty} F(x+\tfrac{1}{n}) - F(x).$$

Das ist positiv, wenn F in x eine Sprungstelle hat.

Die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu_F^*}$ der μ_F^*-meßbaren Mengen hängt von der Verteilungsfunktion F ab. Wie für das Lebesgue-Maß ($\lambda_1 \mathrel{\hat{=}} F(x)=x$) gilt zwar stets $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}_{\mu_F^*}$, aber im Allgemeinen ist $\mathcal{A}_{\mu_F^*} \neq \mathcal{L}_1$. Dazu ein

Bsp.: Für $F = \chi_{[0,\infty)}$ ist $\mathcal{A}_{\mu_F^*} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Denn: Sei $N \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Wir schreiben

$$N = (N\cap(-\infty,0)) + (N\cap\{0\}) + (N\cap(0,\infty)) =: N_- + N_0 + N_+.$$

Dann ist $N_0 = \{0\}$ oder $N_0 = \{0\}$, in beiden Fällen $N_0 \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}_{\mu_F^*}$. Weiter ist $\mu_F((-\infty,0)) = \mu_F((0,\infty)) = 0$ und daher wegen der Vollständigkeit von μ_F auch $N_\pm \in \mathcal{A}_{\mu_F^*}$. Zusammen also: $N \in \mathcal{A}_{\mu_F^*}$.

$\det A \neq 0 \implies A^TA$ ist symmetrisch und positiv definit.

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation gibt es eine orthogonale Matrix O und eine Diagonalmatrix D mit nicht verschwindenden Diagonalelementen, sodass

$$A^TA = OD^2O^T.$$

(Wegen der positiven Definitheit von A^TA kann man hier gleich mit D^2 ansetzen!)

$$\implies \quad O^TA^TAO = D^2 \implies D^{-1}O^TA^TAOD^{-1} = E_n$$

$$\implies (AOD^{-1})^T(AOD^{-1}) = E_n \implies AOD^{-1} \text{ ist orthogonal.}$$

Setze jetzt $O_1^T := (AOD^{-1})^T$ und $O_2 := O^T$. Dann ist

$$O_1^T A O_2^T = D \quad \text{bzw.} \quad A = O_1 D O_2.$$

(Den Satz über die Hauptachsentransformation finden Sie im Skript von Frau Halupczok zur linearen Algebra I, dort Abschnitt L 26.)

Zurückführung der Hilfsaussage über Matrizenzerlegungen im Beweis von Satz 4 auf den Satz über die Hauptachsentransformation