2.3.2 <u>Die Carathéodory-Erweiterung</u>: Von einem Ring auf die hiervon erzeugte σ-Algebra

<u>Def.</u>: Eine Mengenfunktion $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ heißt ein <u>äußeres Maß</u>, falls

"Monotonie"

(1) $\mu^*(\emptyset)=0$; (2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(3) $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ ("σ-Subadditivität,

(Idee dabei: Approximation des Maßes einer Menge A von außen durch elementargeometrische Inhalte, wie das folgende typische Bsp. zeigt:)

<u>Bsp.</u> (für ein äußeres Maß): Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Semiring und $\mu: \mathcal{S} \to [0,\infty]$ ein Inhalt. Dann wird durch

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(R_n) : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n,\ R_n \in \mathcal{S}\right\}$$

(wobei $\inf \emptyset = \infty$) ein äußeres Maß $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ definiert.

<u>Bew.</u>: Stets gilt $\mu^*(A) \geq 0$ und wg. $\emptyset \in \mathcal{S}$ mit $\mu(\emptyset)=0$ ist auch $\mu^*(\emptyset)=0$. Die Monotonie ist auch leicht einsehbar: Ist $A \subset B$, so wird für $\mu^*(A)$ das Infimum über eine <u>größere</u> Menge gebildet als für $\mu^*(B)$. Folglich ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Zur σ-Subadditivität: Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_n \in X$. O.E. (38)
können wir $\mu^*(A_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann
gibt es p. def. zu jedem $\varepsilon > 0$ Mengen $R^{\varepsilon}_{n,k} \in \mathcal{S}$, so

dass $\quad A_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{\varepsilon}_{n,k} \quad$ und $\quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R^{\varepsilon}_{n,k}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

Dann folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^{\varepsilon}_{n,k}$ und wir haben

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R^{\varepsilon}_{n,k}) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \le \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, also $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

Konkretisierung: Wählt man hierin $\mathcal{S} = \mathcal{Q}^{(n)}$,
das System der halboffenen achsenparallelen
Quader im $\mathbb{R}^n$, so erhält man mit

$$\lambda^*_n(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| : A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)} \right\}$$

das <u>äußere Lebesgue-Maß</u>.

Im Hinblick auf die "Kompressionsmethode" bei
Archimedes oder die Ober- und Unterintegrale
bei Darboux / Jordan erscheint es naheliegend,
ein entsprechendes "inneres Maß" zu definieren
(z. B. durch Ausschöpfung mit disjunkten Vereini-
gungen von Semiringelementen) und dann

eine Menge "meßbar" zu nennen, wenn äußeres und inneres Maß übereinstimmen. Diese Vorgehensweise findet man bei Borel und Lebesgue um 1900; es hat sich jedoch eine andere Formulierung durchgesetzt, die mittlerweile als "Carathéodory-Erweiterung" etabliert ist. Zitat Carathéodory[1]:

"Nun habe ich im ~~Juli~~ 1914 den Satz bewiesen: Ist A nach Borel-Lebesgue meßbar, so ist für jede Punktmenge X, ob meßbar oder nicht,

$$m^*(X) = m^*(A\cap X) + m^*(A^c\cap X). \qquad (*)$$

Nimmt man $(*)$ als Definition für die Meßbarkeit, so geht in der Borel-Lebesgueschen Theorie keine messbare Menge verloren.... Die neue Definition hat große Vorteile: ... Die Beweise der Hauptsätze der Theorie sind unvergleichlich kürzer und einfacher als vorher."

Also dann, wieder mit X als ausgezeichneter Grundmenge und μ^* als Bez. für das äußere Maß:

<u>Def.</u>: Eine Teilmenge $A\subset X$ heißt μ^*-messbar, wenn für alle $E\in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c).$$

---

1) Constantin Carathéodory (1873–1950), 1913 Nachfolger Felix Kleins in Göttingen. Zit. nach J. Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie. 7. Aufl., S. 50

Bem.: (1) In Worten lautet die Def.: $A \subset X$ ist genau dann μ^*-messbar, wenn sie jede Teilmenge $E \subset X$ so in die Bestandteile $E \cap A$ und $E \cap A^c$ zerlegt, dass sich μ^* darauf additiv verhält.

(2) "$\le$" gilt stets, denn aus $E = (E \cap A) + (E \cap A^c)$ folgt mit der (σ-) Subadditivität von μ^*, dass

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

(3) $\mu^*(A) = 0 \Rightarrow A$ ist μ^*-messbar. Denn für eine beliebige Teilmenge $E \subset X$ ist (dann)

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \le \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E).$$

Satz 2: Es sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist das System $\mathcal{A}_{\mu^*}$ der μ^*-messbaren Mengen eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}} : \mathcal{A}_{\mu^*} \to [0,\infty]$ ein Maß.

Bew. (in 7 Schritten):

(i) Aus der Def. folgt unmittelbar:

$$A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

(ii) Bem. (3) zur Def. ergibt $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, nach (i) also auch $X \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iii) Wir zeigen: $A_{1,2} \in \mathcal{A}_{\mu^*} \Longrightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, d.h.

reicht! (Bem. (2))

$\forall E \subset X$ ist $\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap E) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap E) \leq \mu^*(E)$ (!)

Dazu sei $E \subset X$ beliebig. Dann gelten

$$\mu^*(E) = \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*(A_1^c \cap E) \quad (\text{da } A_1 \in \mathcal{A}_{\mu^*})$$

$$\overset{(\text{da } A_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*})}{=} \mu^*(A_1 \cap E) + \mu^*(A_1^c \cap A_2 \cap E) + \mu^*(\underbrace{A_1^c \cap A_2^c \cap E}_{=(A_1 \cup A_2)^c \cap E})$$

$$\geq \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap E) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap E),$$

denn $(A_1 \cap E) + (A_1^c \cap A_2 \cap E) = (A_1 + (A_2 \setminus A_1)) \cap E = (A_1 \cup A_2) \cap E$,

und das äußere Maß ist monoton. $\Longrightarrow$ (!)

(iv) Nach (i) und (iii) sind mit $A_{1,2} \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ auch

$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \in \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ und } A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap A_2^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

(v) Als nächstes überlegen wir uns: Sind für $n \in \mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ paarweise disjunkt, so ist auch

$$A := \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

Dazu setzen wir $B_n := \sum_{k=1}^{n} A_k$ und zeigen induktiv:

$\forall E \subset X$ ist $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E \cap A_k)$ (!!)

Der Fall $n = 1$ ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt beachten wir, dass nach (iii) $B_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ ist und erhalten

$$\mu^*(E\cap B_{n+1}) = \mu^*(E\cap B_{n+1}\cap B_n) + \mu^*(E\cap B_{n+1}\cap B_n^c)$$

$$= \mu^*(E\cap B_n) + \mu^*(E\cap A_{n+1})$$ da $B_n \subset B_{n+1}$ und $B_{n+1}\setminus B_n = A_{n+1}$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(E\cap A_k)$$, und das ist (!!)

Hieraus erhalten wir für beliebiges $n\in\mathbb{N}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap B_n) + \mu^*(E\cap B_n^c) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E\cap A_k) + \mu^*(E\cap B_n^c)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E\cap A_k) + \mu^*(E\cap A^c)$$

Für $n\to\infty$ also mit der σ-Subadditivität von μ^*:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} (E\cap A_k) + \mu^*(E\cap A^c) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c).$$

(vi) Mit (v) und (iv) haben wir gezeigt, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ abgeschlossen ist unter $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ und $\bar{e}$, damit ist $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ein Dynkin-System. Da $\mathcal{A}_{\mu^*}$ ferner (ebenfalls nach (iv)) ein Schnitt-System ist, erhalten wir mit Satz 4 aus Abschnitt 2.1

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mu^*}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\mu^*})$$

Außerdem ist $X\in\mathcal{A}_{\mu^*}$ und damit $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra.

(vii) Schließlich folgt aus (!!) mit $E=X$, dass für $A=\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ gilt

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) \quad (n\to\infty).$$

Zusammen mit der σ-Subadditivität eines äußeren Maßes also $\mu^*(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$. Das ist die σ-Additivität von $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$. $\square$

Damit ist die wesentliche Arbeit getan für den

<u>Fortsetzungssatz von Carathéodory:</u> Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}\subset \mathcal{P}(X)$ kann durch

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(R_n) : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n,\ R_n\in\mathcal{R} \Big\}$$

(mit $\inf \emptyset = \infty$) zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ der μ^*-messbaren Mengen fortgesetzt werden. Diese umfasst die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$.

Bem.: Der Beweis wird zeigen, dass man auch in einem Schritt vom Semiring auf die σ-Algebra fortsetzen kann.

Bew.: Aufgrund von Satz 2 und des Beispiels für ein äußeres Maß ist nur noch zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ und dass $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$ ist.

Ist $R \in \mathcal{R}$ und $E \subset X$, so ist $\mu^*(E) = \infty$, sodass

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c)$$

trivialerweise erfüllt ist, oder es gibt zu $\varepsilon > 0$ Elemente $R_n^\varepsilon \in \mathcal{R}$, so dass

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^\varepsilon \qquad \text{und} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(R_n^\varepsilon) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\underbrace{R_n^\varepsilon \cap R}_{\in \mathcal{R}}) + \mu(\underbrace{R_n^\varepsilon \cap R^c}_{= R_n^\varepsilon \setminus R \in \mathcal{R}})$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(R_n^\varepsilon) \leq \mu^*(E) + \varepsilon .$$

$\varepsilon \to 0$: $\mu^*(E \cap R) + \mu^*(E \cap R^c) \leq \mu^*(E)$ und damit "=",

d.h. R ist μ^*-meßbar, also $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mu^*} \Rightarrow \sigma(\mathcal{R}) \subset \sigma(\mathcal{A}_{\mu^*}) = \mathcal{A}_{\mu^*}$

Ferner ist mit $R \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ eine Überdeckung von $R \in \mathcal{R}$ mit Ringelementen gegeben. Daher ist

$$\mu^*(R) = \inf \{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(R_n) : R \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n, R_n \in \mathcal{R} \} \leq \mu(R).$$

Andererseits: Sind $R, R_n \in \mathcal{R}$ mit (o.E) $\mu(R) < \infty$, so dass $R \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$, so gilt aufgrund der aufsteigenden Stetigkeit eines Prämaßes (Abschnitt 2.2, Satz 3):

$$\mu(R) = \lim_{n \to \infty} \mu(R \cap \bigcup_{k=1}^n R_k) \leq \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^n R_k)$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \mu(R_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(R_n) \quad \text{(Subadditivität eines Inhalts)}$$

Infimumbildung ergibt $\mu(R) \leq \mu^*(R)$.

$\square$

Die Erweiterung eines Prämaßes auf einen Ring $\mathcal{R}$ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Dazu ein einfaches

Bsp.: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{ \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, n \in \mathbb{N} \}$, $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}$. Für $A \in \mathcal{B}$ seien $\mu_1(A) = \# A$ und $\mu_2 = 2\mu_1$, wobei $2 \cdot \infty = \infty$. Dann ist $\mu_1|_{\mathcal{R}} = \mu_2|_{\mathcal{R}}$, aber $\mu_1|_{\mathcal{B}} \neq \mu_2|_{\mathcal{B}}$ denn die einelementigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen und gehören daher zu $\mathcal{B}$.

Fordert man jedoch die σ-Endlichkeit von $\mu: \mathcal{R} \to [0,\infty]$ so kann man damit die Eindeutigkeit der Fortsetzung erzwingen. Etwas allgemeiner gilt der

<u>Eindeutigkeitssatz für Maßerweiterungen</u>: Es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra, $\emptyset \neq \mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein $\cap$-System, so dass $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$, und

$$\mu, \nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$$

Maße mit den folgenden Eigenschaften

(1) $\mu|_{\mathcal{M}} = \nu|_{\mathcal{M}}$ und

(2) Es gibt eine Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{M}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ (d.h. $\mu|_{\mathcal{M}}$ ist σ-endlich).

Dann ist $\mu = \nu$.

Bew.: Für $E\in\mathcal{M}$ mit $\mu(E)<\infty$ sei

$$\mathcal{D}_E := \{A\in\mathcal{A} : \mu(A\cap E)=\nu(A\cap E)\}.$$

Dann ist $\emptyset\in\mathcal{D}_E$, $\mathcal{M}\subset\mathcal{D}_E$ (da $\mathcal{M}=\mathcal{M}^\cap$) und

(i) für $A,B\in\mathcal{D}_E$ mit $B\subset A$ ist

$$\mu((A\setminus B)\cap E)=\mu((A\cap E)\setminus(B\cap E))=\mu(A\cap E)-\mu(B\cap E)$$

$$=\nu(A\cap E)-\nu(B\cap E)=\ldots=\nu((A\setminus B)\cap E)\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{D}_E;$$

(ii) sind für $n\in\mathbb{N}$ $A_n\in\mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt, so ist

$$\mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\cap E\Big)=\mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap E)\Big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n\cap E)=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A_n\cap E)=\ldots=\nu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n\cap E\Big)\Rightarrow\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{D}_E.$$

D.h. $\mathcal{D}_E$ ist ein Dynkin-System, welches $\mathcal{M}$ umfasst.

Nach Satz 4 in Abschnitt 2.1 ist für das $\cap$-System $\mathcal{M}$ $R(\mathcal{M})=\mathcal{D}(\mathcal{M})\subset\mathcal{D}_E$. Wg. der Voraussetzung (2) ist auch $X\in R(\mathcal{M})$ und damit $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{M})\subset\mathcal{D}_E$.

Damit ist erreicht:

$\forall A\in\mathcal{A}\ \forall E\in\mathcal{M}$ mit $\mu(E)<\infty$ ist $\mu(A\cap E)=\nu(A\cap E)$.

Mit den Mengen $A_n\in\mathcal{M}$ aus Vor. (2) definieren wir

$$B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\setminus\Big(\underbrace{\bigcup_{l=1}^{k-1} A_l}_{B_{k-1}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} A_k\cap B_{k-1}^c \quad (*).$$

Dann gilt $B_n \nearrow X$ und wir erhalten für $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \cap B_n) = \mu(A \cap \sum_{k=1}^{n} A_k \cap B_{k-1}^c)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu(\underbrace{A \cap B_{k-1}^c}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{A_k}_{\in \mathcal{M},\, \mu(A_k)<\infty})$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \nu(A \cap B_{k-1}^c \cap A_k) = \dots = \nu(A \cap B_n).$$

Im $\lim_{n\to\infty}$ aufgrund der aufsteigenden Stetigkeit von Maßen also $\mu(A) = \nu(A) \;\forall A \in \mathcal{A}$. □

<u>Zsf.</u>: (1) Jedes Prämaß μ auf einem Semiring $\mathcal{S}$ lässt sich zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ der μ^*-messbaren Mengen fortsetzen, diese enthält die von $\mathcal{S}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{S})$.

(2) Ist $\mu: \mathcal{S} \to [0,\infty]$ σ-endlich, so ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt.