2.3 Fortsetzung von Inhalten und Prämaßen

2.3.1 Von einem Semiring auf den hiervon erzeugten Ring

Satz 1: Es seien $\mathcal{S}$ ein Semiring, $r(\mathcal{S})$ der von $\mathcal{S}$ erzeugte Ring und $\mu: \mathcal{S} \to [0,\infty]$ ein Inhalt. Dann gibt es genau einen Inhalt $\tilde{\mu}: r(\mathcal{S}) \to [0,\infty]$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$. Ist μ ein Prämaß, so ist auch $\tilde{\mu}$ ein Prämaß.

Bez.: Man nennt $\tilde{\mu}$ eine Fortsetzung oder auch eine Erweiterung von μ.

Bew.: (1) Definition von $\tilde{\mu}$: Nach Satz 2 in Abschnitt 2.1 gilt $r(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^+$. Zu $A \in r(\mathcal{S})$ gibt es also Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, sodass $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

Wir setzen

$$\tilde{\mu}(A) := \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Wohldefiniertheit: Sei $A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j$ mit $A_i, B_j \in \mathcal{S}$. Aufgrund der $\cap$-Abgeschlossenheit eines Semirings sind $A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ und wir erhalten:

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu\Big(B_j \cap \sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \overset{\mu \text{ ist ein Inhalt.}}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu\Big(A_i \cap \sum_{j=1}^{m} B_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Also ist $\tilde{\mu}(A)$ unabhängig von der Zerlegung von A in Elemente des Semirings $\mathcal{S}$.

(2) Für $A \in \mathcal{S}$ ist $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, d.h. $\tilde{\mu}$ ist eine Fortsetzung von μ. Ferner ist $\tilde{\mu}$ endlich additiv, vgl. Schritt (4).

(3) Eindeutigkeit: Sei $\bar{\mu} : r(\mathcal{S}) \to [0,\infty]$ ein zweiter Inhalt mit $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{S}$. Dann ist für $A = \sum_{i=1}^{n} A_i \in r(\mathcal{S})$ mit $A_i \in \mathcal{S}$:

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \overset{\bar{\mu} \text{ ist ein Inhalt}}{=} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(A_i) \underset{(2)}{=} \tilde{\mu}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \tilde{\mu}(A).$$

(4) Nun seien μ ein Prämaß und, für $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in r(\mathcal{S})$ paarweise disjunkt mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A \in r(\mathcal{S})$.

Dann gibt es $B_{n,k}, C_\ell \in \mathcal{S}$, so dass

$$A_n = \sum_{k=1}^{K(n)} B_{n,k} \quad \text{und} \quad A = \sum_{\ell=1}^{L} C_\ell .$$

Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, K(n)\}$ und $\forall \ell \in \{1, \dots, L\}$

$$C_\ell = C_\ell \cap A = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap C_\ell = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K(n)} B_{nk} \cap C_\ell \qquad (*)$$

und andererseits auch

$$B_{nk} = \sum_{\ell=1}^{L} B_{nk} \cap C_\ell \quad . \qquad (**)$$

Damit erhalten wir

$$\tilde{\mu}(A) \underset{\text{Def. } \tilde{\mu}}{=} \sum_{\ell=1}^{L} \mu(C_\ell) \underset{(*)}{=} \sum_{\ell=1}^{L} \mu\Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K(n)} B_{nk} \cap C_\ell \Big)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K(n)} \mu(B_{nk} \cap C_\ell) \quad \text{(da } \mu \ \sigma\text{-additiv ist)}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K(n)} \mu\Big(B_{nk} \cap \sum_{\ell=1}^{L} C_\ell\Big) \underset{(**)}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{K(n)} \mu(B_{nk})$$

$$\underset{\text{Def. } \tilde{\mu}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}\Big(\sum_{k=1}^{K(n)} B_{nk}\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(A_n). \qquad \square$$

Dass hier noch nicht allzuviel passiert ist, zeigen die folgenden

Bspe.: (1) Auf dem Semiring $\mathcal{J} = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ haben wir mit Hilfe einer monoton steigenden linksseitig stetigen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Lebesgue-Stieltjes-Prämaß

$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$$

definiert. Hierbei ist

$$r(\mathcal{S}) = \{ \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i \leq b_i \}$$

und die eindeutig bestimmte Fortsetzung von μ_F auf $r(\mathcal{S})$ ist gegeben durch

$$\tilde{\mu}_F \Big(\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \Big) = \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i).$$

(2) Das System $\mathcal{Q}^{(n)}$ aller Quader der Form

$$Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$$

bildet einen Semiring, auf dem das Lebesguesche Prämaß

$$\lambda_n \Big(\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \Big) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

gegeben ist. Den von $\mathcal{Q}^{(n)}$ erzeugten Ring

$$r(\mathcal{Q}^{(n)}) = \{ \sum_{k=1}^{N} Q_k : N \in \mathbb{N},\ Q_k \in \mathcal{Q}^{(n)} \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

hatten wir als Ring der endlichen Quadersummen bezeichnet. Die Fortsetzung $\tilde{\lambda}_n$ von λ_n auf $r(\mathcal{Q}^{(n)})$ nach Satz 1 ist gegeben durch

$$\tilde{\lambda}_n \Big(\sum_{k=1}^{N} Q_k \Big) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_n (Q_k)$$

wie wir es bereits mit $\lambda_n(Q_k)$ erhielten. Allerdings wissen wir jetzt: $\tilde{\lambda}_n$ ist ein wohldefiniertes Prämaß auf $r(\mathcal{Q}^{(n)})$, welches λ_n fortsetzt und dadurch eindeutig bestimmt ist. (Nach einer zweiten Erweiterung zum Lebesgue-Maß auf einer σ-Algebra werden wir auf die ~ über dem λ_n wieder verzichten.)