2.2 Mengenfunktionen

Darunter sind allgemein Abbildungen von einem Mengensystem nach $[0,\infty]$ oder auch nach $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ oder $=\mathbb{C}$) zu verstehen. Für den Aufbau der Theorie ist der Fall $[0,\infty]$ relevant. Nach wie vor betrachten wir Mengensysteme $\mathcal{M}$ auf einer Grundmenge X.

Def.: Es sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\emptyset \in \mathcal{M}$. Eine Mengenfunktion $\mu: \mathcal{M} \longrightarrow [0,\infty]$ heißt ein

(1) Inhalt, falls gilt

"endliche Additivität"

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ und

(ii) sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt, so dass $\sum_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}$, so gilt $\mu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$;

(2) Prämaß, falls in (1) statt (ii) gilt

(ii') sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt, so dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$, so gilt $\mu\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

(σ-Additivität)

(3) Ein Prämaß auf einer σ-Algebra heißt ein Maß.

Ein Inhalt μ heißt endlich, wenn $\mu(A) < \infty$ ist $\forall A \in \mathcal{M}$. μ heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $(A_n)_n$ in $\mathcal{M}$ gibt, so dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bem.: (1) Da $\phi \in \mathcal{M}$ vorausgesetzt ist, ist jedes Prämaß und also auch jedes Maß zugleich ein Inhalt, so dass die Begriffe "endlich" und "σ-endlich" auch für (Prä-) Maße definiert sind. Ein Maß ist endlich, wenn $\mu(X) < \infty$ ist, vgl. die Monotonieeigenschaft in Satz 2 unten.

(2) Mit dem Jordanschen Inhalt auf dem System $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ der Jordanbereiche haben wir im Abschnitt 1 ein grundlegendes Bsp. für einen Inhalt kennengelernt.

Weitere Bspe.:

(1) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$, $A \longmapsto \mu(A) := \begin{cases} 0 : A = \phi \\ \infty : \text{sonst} \end{cases}$ ist ein Maß auf $\mathcal{M}$; μ ist für $X \neq \phi$ nicht σ-endlich.

(2) $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = \# A$ definiert ein Maß auf $\mathcal{M}$, das sogenannte Zählmaß. Es ist endlich (bzw. σ-endlich) genau dann, wenn X endlich (bzw. abzählbar unendlich) ist.

(3) Jede Linearkombination $\lambda\mu + \delta\nu$ von Inhalten μ, ν mit Koeffizienten $\lambda, \delta \geq 0$ ist ein Inhalt, ebenso für (Prä-) Maße. Jede Konvexkombination von <u>Wahrscheinlichkeitsmaßen</u> (d.h. $\underline{\mu(X) = 1}$) ist ein W.-Maß.

(4) Auf dem Semiring

$$\mathcal{Q}^{(n)} = \{ \mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i \} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

der halboffenen Quader wird durch

$$\lambda_n \Big(\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \Big) := \Big| \mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \Big| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

ein Prämaß definiert. Dieses werden wir in zwei Schritten zum Lebesgue-Maß erweitern, daher die Bez. λ_n.

(5) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton steigend (nicht notwendig strikt) und $\mathcal{I} := \{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \le b \}$ der Semiring der halboffenen Intervalle. Dann wird durch $\mu_F([a, b)) := F(b) - F(a)$ ein Inhalt auf $\mathcal{I}$ definiert. Dieser ist ein Prämaß genau dann, wenn F linksseitig stetig ist.

<u>Diskussion</u> <u>zu Bsp. (5):</u>

(i) Im Fall der linksseitigen Stetigkeit von F werden wir später μ_F auf die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (und sogar etwas darüber hinaus) erweitern. Diese Fortsetzung wird dann als <u>Lebesgue-Stieltjes-Maß</u> bezeichnet. Für $F(t) = t$ erhält man das <u>Lebesgue-Maß</u> auf $\mathcal{B}_1$ (bzw. auf den Lebesgue-Mengen in $\mathbb{R}$).

(ii) Die Funktion F in diesem Zsh. wird häufig als <u>Verteilungsfunktion</u> bezeichnet, insbes. dann wenn es sich bei μ_F um ein W.-Maß (charakterisiert durch $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$) handelt. Hierfür benötigt man, dass $\lim_{t \to \infty} F(t) - F(-t) = 1$.

(iii) Das Bsp. $F(t) = \chi_{(0,\infty)}(t)$ ist ein verschiedener Hinsicht instruktiv:

- Ist $[a,b) \subset (-\infty, 0]$ oder $[a,b) \subset (0,\infty)$, so ist
$$\mu_F([a,b)) = \chi_{(0,\infty)}(b) - \chi_{(0,\infty)}(a) = 0.$$
Hier wird also Intervallen positiver Länge das (Prä-)Maß $\mu_F([a,b)) = 0$ zugeordnet. (Allgemeiner gilt: Ist F auf $(\alpha, \beta]$ konstant und $[a,b) \subset (\alpha, \beta)$, d.h. $\alpha < a \leq b \leq \beta$, so ist
$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a) = 0.)$$
- Andererseits ist für $F = \chi_{(0,\infty)}$ und jedes $\varepsilon > 0$
$$\mu_F([0,\varepsilon)) = \chi_{(0,\infty)}(\varepsilon) - \chi_{(0,\infty)}(0) = 1 - 0 = 1.$$

Insofern ist für dieses spezielle F das gesamte (Prä-)Maß im Nullpunkt konzentriert. Nach Fortsetzung auf eine σ-Algebra werden wir es als <u>Dirac-Maß δ_0</u> bezeichnen.

• Es ist $\lim_{t\to 0, t<0} \chi_{(0,\infty)}(t) = 0 = \chi_{(0,\infty)}(0)$. $F = \chi_{(0,\infty)}$ ist also linksseitig stetig und somit μ_F ein Prämaß (Bew. s.u.)
Anders bei der rechtsseitig stetigen Variante μ_H mit $H = \chi_{[0,\infty)}$. Hierfür haben wir

$$\mu_H([-1,0)) = H(0) - H(-1) = 1 - 0 = 1, \quad \text{aber}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_H([-\tfrac{1}{n}, \tfrac{-1}{n+1})) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[0,\infty)}(-\tfrac{1}{n}) - \chi_{[0,\infty)}(-\tfrac{1}{n+1}) = 0,$$

obwohl $[-1,0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{1}{n}, \frac{-1}{n+1})$. μ_H ist also nicht σ-additiv und daher lediglich ein Inhalt, aber kein Prämaß.

(iv) Zum Beweis der Implikation

F ist linksseitig stetig $\Rightarrow$ μ_F ist ein Prämaß

möchte ich die <u>Heine-Borelsche</u> <u>Überdeckungseigenschaft</u> kompakter Intervalle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ verwenden. Damit ist folgendes gemeint:

<u>Lemma</u> 1: Ist $(\Omega_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen $\Omega_i \subset \mathbb{R}$, so dass $[\alpha,\beta] \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, so existiert eine <u>endliche</u> Indexmenge $I_0 \subset I$ derart, dass bereits $[\alpha,\beta] \subset \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i$.

("Aus jeder offenen Überdeckung von $[\alpha,\beta]$ lässt sich eine endliche Teilüberdeckung auswählen." – Etwas ungenau aber einprägsam.)

Bew.: Seien $[\alpha,\beta]$ und $(\Omega_i)_{i\in I}$ vorgegeben, so dass $[\alpha,\beta]\subset\bigcup_{i\in I}\Omega_i$. Wir nehmen an, es gebe keine endliche Indexmenge $I_0\subset I$, so dass $[\alpha,\beta]\subset\bigcup_{i\in I_0}\Omega_i$. Dann erhalten wir (induktiv) durch wiederholte Intervallhalbierungen eine Folge (J_n) von Intervallen mit

(i) $|J_n|=\frac{\beta-\alpha}{2^n}$; (ii) $J_{n+1}\subset J_n$ und

(iii) J_n ist in keiner endlichen $\bigcup_{i\in I_0}\Omega_i$ enthalten.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es genau ein $x\in[\alpha,\beta]$, so dass $\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}J_n$. Zu diesem $x\in[\alpha,\beta]$ gibt es ein $i_0\in I$, so dass $x\in\Omega_{i_0}$, und, da Ω_{i_0} offen ist, ein $\varepsilon>0$, so dass $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset\Omega_{i_0}$. Ist nun n so groß, dass $\frac{\beta-\alpha}{2^n}<\varepsilon$, so haben wir $J_n\subset U_{i_0}$ und damit einen $\lightning$.

In der Analysis II haben wir den Begriff der Kompaktheit in metrischen Räumen mit Hilfe konvergenter Teilfolgen definiert. Erinnerung:

Def.: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert zu K gehört.

In metrischen Räumen erweist sich dieser Kompaktheitsbegriff – die sog. Folgenkompaktheit – als gleichwertig zur Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft: In Verallgemeinerung von Lemma 1 gilt der

Satz 1: Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X,d) ist genau dann kompakt (im Sinne der o.g. Definition), wenn zu jeder Überdeckung von K mit offenen Teilmengen $(\Omega_i)_{i\in I}$ eine endliche Indexmenge $I_0 \subset I$ existiert, so dass bereits

$$K \subset \bigcup_{i\in I_0} \Omega_i .$$

(Für einen Beweis dieses Satzes in voller Allgemeinheit sei verwiesen auf: Kaballo II, Theorem 10.9.)

Der Vorteil der Überdeckungseigenschaft gegenüber dem Begriff der Folgenkompaktheit besteht darin, dass zu ihrer Formulierung keine Metrik, sondern lediglich die offenen Mengen benötigt werden. Sie erlaubt daher die Definition der Kompaktheit in einem (lediglich) topologischen nicht metrisierbaren Raum.

(V) Beweis der Behauptungen in Bsp. (5):

Schritt 1: Wir zeigen: Ist $\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \subset [a,b)$, so gilt (!)

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_F([a_i, b_i)) \leq \mu_F([a,b))$$

Dazu können wir nach Umordnung und Aussonderung leerer Mengen annehmen, dass

$$a \leq \dots a_i < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1} \leq \dots b.$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_F([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i)$$

$$= F(b_n) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} F(b_i) - F(a_{i+1})}_{\leq 0} - F(a_1)$$

$$\leq F(b_n) - F(a_1) \leq F(b) - F(a) = \mu_F([a,b)). \Rightarrow (!)$$

Schritt 2: Feststellung: Hierbei gilt "=", wenn $\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = [a,b)$ ist, denn dann gilt $b_n = b$, $a_1 = a$ und $b_i = a_{i+1}$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, und alle "$\leq$" sind durch "=" zu ersetzen. (Damit ist dann gezeigt, dass μ_F ein Inhalt ist.)

Schritt 3: Wenn $\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \supset [a,b)$ ist, gilt $\sum_{i=1}^{n} \mu_F([a_i, b_i)) \geq \mu_F([a,b))$. Dies folgt aus Schritt 2, wenn man ggf. a und b als Zerlegungspunkte hinzunimmt.

Schritt 4: Nun sei F linksseitig stetig und $\sum_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n) = [a,b)$. (27)

Dann ist für jedes $m\in\mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{m} [a_n, b_n) \subset [a,b)$ und

daher nach Schritt 1

$$\sum_{n=1}^{m} \mu_F([a_n,b_n)) \le \mu_F([a,b)) \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F([a_n,b_n)) \le \mu_F([a,b))$$

Um "$\ge$" einzusehen, wählen wir zu $\varepsilon \in (0, b-a)$ eine Folge $\delta_n = \delta_n(\varepsilon) > 0$, so dass

$$F(a_n) - F(a_n - \delta_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}. \qquad (*)$$

(Möglich aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von F.)

Dann gilt $[a, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n - \delta_n, b_n)$, und mit dem Überdeckungslemma erhalten wir ein $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, s.d.

$$[a, b-\varepsilon) \subset [a, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{m} (a_n - \delta_n, b_n) \subset \bigcup_{n=1}^{m} [a_n - \delta_n, b_n).$$

Aus Schritt 3 ergibt sich dann

$$\mu_F([a, b-\varepsilon)) \le \sum_{n=1}^{m} \mu_F([a_n - \delta_n, b_n))$$

$$\le \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\mu_F([a_n - \delta_n, a_n))}_{= F(a_n) - F(a_n - \delta_n)} + \sum_{n=1}^{m} \mu_F([a_n, b_n)) \quad \text{(nach Schritt 2)}$$

$$\underset{(*)}{\le} \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F([a_n, b_n)).$$

$$\Rightarrow \mu_F([a,b)) \le \mu_F([a, b-\varepsilon)) + \mu_F([b-\varepsilon, b)) \quad \text{(Schritt 2)}$$

$$\le \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_F([a_n, b_n)) + F(b) - F(b-\varepsilon)$$

Für $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$) also wg. der linksseitigen Stetigkeit von F

$$\mu_F([a,b)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F([a_n, b_n))$$ (28)

und damit "=". D.h. $\mu_F : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ ist ein Prämaß.

Schritt 5: Nun sei $\mu_F : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ ein Prämaß, $x \in \mathbb{R}$ und $(\varepsilon_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist

$$F(x) - F(x-\varepsilon_1) = \mu_F([x-\varepsilon_1, x)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_F([x-\varepsilon_n, x-\varepsilon_{n+1}))$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} F(x-\varepsilon_{n+1}) - F(x-\varepsilon_n) = \lim_{N \to \infty} F(x-\varepsilon_N) - F(x-\varepsilon_1)$$

$$\Rightarrow F(x) = \lim_{N \to \infty} F(x-\varepsilon_N),$$ F ist also linkss. stetig.

(Für beliebige Nullfolgen $(\delta_n)_n$ mit $\delta_n > 0$ setzt man $\varepsilon_n := \max_{k \geq n} \delta_k$. Dann ist $\varepsilon_n \searrow 0$ und $F(x-\varepsilon_n) \leq$ $F(x-\delta_n) \leq F(x)$. Jetzt Sandwich-Theor.)

(Vorläufiges Ende der Diskussion zu Lebesgue-Stieltjes)

<u>Satz 2</u>: Es seien R ein Ring, $\mu: R \to [0,\infty]$ ein Inhalt und $A, B, A_1, \dots, A_n, \dots \in R$. Dann gelten:

(1) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$ (Monotonie)

(2) $A \subset B \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \mathbin{\overline{\setminus}} A) = \mu(B) - \mu(A)$ (∞ auf beiden Seiten möglich)

(3) $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(4) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (Subadditivität)

(5) Sind alle $A_n, n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und gilt ferner $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in R$, so ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \le \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$

<u>Bew.</u>: (1) Aus $A \subset B$ folgt $B = A + B \mathbin{\overline{\setminus}} A$ und es ist $B \mathbin{\overline{\setminus}} A \in R$. Die Additivität eines Inhalts ergibt

$$\mu(B) \overset{(*)}{=} \mu(A) + \mu(B \mathbin{\overline{\setminus}} A) \ge \mu(A).$$

(2) Subtrahiere $\mu(A) < \infty$ auf beiden Seiten von $(*)$.

(3) ist klar, wenn $\mu(A) = \infty$ oder $\mu(B) = \infty$. Andernfalls schreiben wir

$$A \cup B = (A \setminus B) + (B \setminus A) + (A \cap B) = A \mathbin{\overline{\setminus}} (A \cap B) + B \mathbin{\overline{\setminus}} (A \cap B) + A \cap B.$$

$$\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \mathbin{\overline{\setminus}} (A \cap B)) + \mu(B \mathbin{\overline{\setminus}} (A \cap B)) + \mu(A \cap B)$$

$$\underset{(2)}{=} \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(4) induktiv aus (3).

(5) $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) \underset{(1)}{\le} \mu\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$. Jetzt $N \to \infty$!

$\square$

Bez.: Für eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben wir

$$A_n \nearrow A :\iff A_n \subset A_{n+1} \ \forall n\in\mathbb{N} \text{ und } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A,$$

$$A_n \searrow A :\iff A_n \supset A_{n+1} \ \forall n\in\mathbb{N} \text{ und } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A.$$

Satz 3: Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu: \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß. Dann gelten:

(1) Sind $\forall n\in\mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{R}$ und ist $A_n \nearrow A \in \mathcal{R}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. ("$\mu$ ist aufsteigend stetig.")

(2) Sind $\forall n\in\mathbb{N}$ $A_n \in \mathcal{R}$ und ist $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ sowie $\underline{\mu(A_1) < \infty}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. ("$\mu$ ist absteigend stetig.")

Bew.: (1) Mit $A_0 := \emptyset$ haben wir

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n-1} \text{ und } A_N = \sum_{n=1}^{N} A_n \setminus A_{n-1}.$$

Daraus folgt

$$\mu(A) = \mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus A_{n-1}\Big) \overset{\mu \text{ Prämaß}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \underset{\text{endl. Additivität}}{=} \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\sum_{n=1}^{N} A_n \setminus A_{n-1}\Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

(2) Mit $\mu(A_1)<\infty$ sind alle auftretenden Prämaße und auch der Grenzwert endlich. (87)

$A_n \searrow A \Rightarrow A_1 \setminus A_n \nearrow A_1 \setminus A$. Satz 2 (2) u. Teil (1) liefern

$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1\setminus A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\setminus A_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1)-\mu(A_n) \Rightarrow \mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Bem. und Bsp.: Ohne die Voraussetzung $\mu(A_1)<\infty$ wird die Aussage in Teil (2) falsch. Dazu sei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $A_n=\{k\in\mathbb{N}: k\geq n\}$. Dann ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\emptyset$, aber $\mu(A_n)=\infty \ \forall n\in\mathbb{N}$. Es gilt also nicht $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\emptyset)=0$.

Umgekehrt kann man sich fragen, ob die auf- bzw. absteigende Stetigkeit eines Inhalts bereits hinreichend dafür sind, dass es sich dabei um ein Prämaß handelt. Das ist tatsächlich so:

Satz 4: Es sei $\mu: R\to[0,\infty]$ ein Inhalt auf einem Ring R. Dann ist μ ein Prämaß, falls eine der folgenden Aussagen gilt

(1) μ ist aufsteigend stetig,
(2) μ ist absteigend stetig in $\emptyset$, d.h. es gilt:

$$A_n\in R \ \forall n\in\mathbb{N},\ A_n\searrow\emptyset \Rightarrow \mu(A_n)\xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Bem.: Im Teil (2) wird (im Ggs. zu Satz 3) nicht
$\mu(A_1)<\infty$ gefordert. Würde man diese Bedingung hinzufügen, so würde die Aussage falsch. Dazu ein

Bsp.: $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{R}=\{A\subset\mathbb{N} : \#A<\infty \text{ oder } \#A^c<\infty\}$ und

$$\mu:\mathcal{R}\to[0,\infty],\ A\mapsto\mu(A):=\begin{cases}0, & \text{falls } \#A<\infty\\ \infty & \text{sonst}\end{cases}.$$

Dann ist μ ein Inhalt mit der Eigenschaft, dass für alle $(A_n)_n$ mit $\mu(A_1)<\infty$ und $A_n\searrow\emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$. Aber μ ist <u>kein</u> Prämaß, denn

$$\infty=\mu(\mathbb{N})=\mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}\{n\}\Big)\neq\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(\{n\})=0.$$

Bew. des Satzes: Für $n\in\mathbb{N}$ seien $B_n\in\mathcal{R}$ paarweise disjunkt und $A=\sum_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{R}$.

(1) Wir setzen $A_n:=\sum_{j=1}^{n}B_j\nearrow A$. Dann gilt bei aufsteigender Stetigkeit von μ:

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\sum_{j=1}^{n}B_j\Big)$$

$$\overset{\text{endl. Additivität}}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n).$$

(2) $A_n:=A\setminus\sum_{j=1}^{n}B_j\searrow\emptyset$, also bei absteigender Stetigkeit in $\emptyset$: $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$.

$$\Rightarrow\mu(A)=\mu\Big(A_n+\sum_{j=1}^{n}B_j\Big)\overset{\text{endl. Add.}}{=}\mu(A_n)+\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)\to\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n).$$

$\square$