Kap. 2: Maß- und Integrationstheorie

2.1 Mengensysteme

Im Folgenden sei X stets eine (ausgezeichnete Grund-) Menge. Mit $\mathcal{P}(X)$ wird die Potenzmenge von X bezeichnet, das ist die Menge aller Teilmengen von X. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Mengensystem. Erinnert sei an die üblichen Mengenoperationen. Dabei werden einige neue oder spezielle Symbole eingeführt. Für $A, B, \ldots, A_n \ (n \in \mathbb{N}) \subset X$ bezeichnet

(1) $A \cup B$ die Vereinigung von A und B, bei disjunkter Vereinigung schreiben wir $A + B$; sind für $n \in \mathbb{N}$ die A_n paarweise disjunkt: $\sum_{n \in \mathbb{N}} A_n$ statt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$;

(2) $A \cap B$ den Durchschnitt von A und B, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ den Durchschnitt aller A_n, $n \in \mathbb{N}$;

(3) $A \setminus B$ die (mengentheoretische) Differenz ("ohne"), falls $B \subset A$ ist, schreiben wir hierfür $A - B$, was als eigentliche Differenz bezeichnet wird. Darüber hinaus führt man die symmetrische Differenz ein:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(Für das "=" beachte man, dass die Objekte beiderseits genau diejenigen sind, die entweder in A oder in B enthalten sind.)

(4) $A^c := X \setminus A$ heißt das Komplement von A (in X). ②

mit Hilfe der Komplementbildung können wir die Differenz auf den Durchschnitt zurückführen, denn es gilt $A \setminus B = A \cap B^c$.

Vereinigung, Durchschnitt und symmetrische Differenz sind assoziativ und kommutativ (was Δ anbelangt, vgl. Übungen, Blatt 4). Es gelten die Distributivgesetze:

$$\text{(i)} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$\text{(ii)} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$\text{(iii)} \quad (A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C), \ (\rightarrow \ddot{U})$$

wobei man in (iii) die Rollen von $\cap$ und Δ nicht vertauschen kann.

Def.: Sei $\circ$ eine der zweistelligen o.g. Mengenoperationen. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt $\circ$-abgeschlossen (oder: ein $\circ$-System), wenn für alle $A, B \in \mathcal{M}$, für die $A \circ B$ definiert ist, gilt, dass auch $A \circ B \in \mathcal{M}$.

Lemma 1: Zu $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ existiert stets ein kleinstes $\circ$-System, das $\mathcal{M}$ umfasst. (Dieses wird mit $\mathcal{M}^\circ$ bezeichnet.)

Bew.: In $P(X)$ existiert ein $\circ$-System, das $\mathcal{M}$ enthält. Der beliebige Durchschnitt von $\circ$-Systemen ist wieder ein $\circ$-System. Man erhält also $\mathcal{M}^\circ$ als Durchschnitt über alle $\circ$-Systeme, die $\mathcal{M}$ enthalten.

Bem.: (1) Ebenso kann man für ^{c}, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ etc. argumentieren. Bez. entsprechend, z.B. $\mathcal{M}^c := \{M^c : M \in \mathcal{M}\}$.

(2) Die Abbildung $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^\circ$ wird als ein Hüllenoperator bezeichnet, d.h. es gelten $(\mathcal{M}^\circ)^\circ = \mathcal{M}^\circ$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{N}^\circ$.

Def.: Ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{R} \subset P(X)$ heißt ein (Mengen-)Ring (auf X), falls

(1) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ (Vereinigungsabgeschlossenheit),

(2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ (Differenz- ").

Ein Ring $\mathcal{R}$ mit $X \in \mathcal{R}$ heißt eine (Mengen-)Algebra.

Bsp.: (1) Die kleinste Mengenalgebra auf X ist $\{\emptyset, X\}$, die größte ist $P(X)$.

(2) $\mathcal{R} := \{A \subset X : \#A < \infty\}$ ist ein Ring auf X und genau dann eine Algebra, wenn $\#X < \infty$ ist. Hingegen ist $\{A \subset X : \#A < \infty \vee \#A^c < \infty\}$ stets eine Algebra. (Vgl. Lemma 3 unten. (!))

(3) $\mathcal{R} := \{ \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i) : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \}$ ist ④

eine Ring auf $\mathbb{R}$, aber keine Algebra, da $\mathbb{R} \neq \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Lemma 2: (1) Ist $\mathcal{R}$ eine Ring, so ist $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $\mathcal{R}$

ist $\cap$- und Δ-abgeschlossen.

(2) Eine Mengensystem $\mathcal{M}$ ist genau dann eine

Algebra, wenn $\mathcal{M} \neq \emptyset$ und $\mathcal{M}$ abgeschlossen

unter $\cup$ und ^{c} ist.

Bew.: (1) Da $\mathcal{R} \neq \emptyset$ ist, gibt es eine $A \in \mathcal{R}$ und da-

mit ist $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$ wegen der Differenzabge-

schlossenheit. Aus $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ folgt die

$\cap$-Abgeschlossenheit. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

ergibt die Abgeschlossenheit unter Δ.

(2) "$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{M}$ eine Algebra. Dann ist $X \in \mathcal{M}$,

insbes. $\mathcal{M} \neq \emptyset$, und mit $A \in \mathcal{M}$ ist auch

$A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$. Die $\cup$-Abgeschlossenheit ist p.d.

gegeben.

"$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ abgeschlossen unter $\cup$ und ^{c}. Dann

existiert $A \in \mathcal{M}$, für das auch $A^c \in \mathcal{M}$ und da-

mit $X = A \cup A^c \in \mathcal{M}$. Die $\setminus$-Abgeschlossenheit

folgt jetzt aus $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$.

Bez.: Für ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ bezeichnen

(1) $r(\mathcal{M})$ den von $\mathcal{M}$ erzeugten Ring, d.i. der kleinste Ring auf X, der $\mathcal{M}$ enthält,

(2) $a(\mathcal{M})$ die von $\mathcal{M}$ (im selben Sinn) erzeugte Algebra.

(Zur Existenz vgl. Lemma 1.)

Lemma 3: Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, so gilt $a(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$.

Bew.: "$\supset$" P.d. ist $\mathcal{R} \subset a(\mathcal{R})$. Wegen der ^{c}-Abgeschlossenheit einer Algebra (Lemma 2 (2)) folgt daraus auch $\mathcal{R}^c \subset a(\mathcal{R})$.
Für "$\subset$" ist lediglich zu zeigen, dass $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$ eine Algebra ist. Da $\mathcal{R}$ ein Ring ist, ist $\emptyset \in \mathcal{R}$, insbesondere ist $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c \neq \emptyset$ und p.d. ^{c}-abgeschlossen. Aus der $\cap$-Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}$ (Lemma 2 (1)) folgt mit de Morgan die $\cup$-Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}^c$ und damit von $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$. Lemma 2 (2) ergibt die Beh..

Bem. Damit ist z.B. für $\mathcal{R} = \{A \subset X : \# A < \infty\}$ $a(\mathcal{R}) = \{A \subset X : \# A < \infty \vee \# A^c < \infty\}$. Das klärt dann auch die in Bsp. (2) oben unbegründete Behauptung.

Satz 1: Ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ein $\cap$-System, so ist $r(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$. 6

Bew.: Jede disjunkte Vereinigung ist eine Vereinigung und jede eigentliche Differenz eine Differenz. Daher gilt $\mathcal{M}^{+,\bar{e}} \subset \mathcal{M}^{\cup,\setminus} = r(\mathcal{M})$. Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir zuerst

Beh.: Mit $\mathcal{M}$ ist auch $\mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ ein $\cap$-System.

Für zunächst beliebiges $E \subset X$ setzen wir

$$D_E := \{ B \subset X : E \cap B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}} \}$$

Sind $A, B \in D_E$ mit $A \cap B = \emptyset$, so ist

$$E \cap (A + B) = (E \cap A) + (E \cap B) \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}},$$

gilt für $A, B \in D_E$, dass $B \subset A$, so haben wir

$$E \cap (A \bar{e} B) = (E \cap A) \bar{e} (E \cap B) \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}.$$

D.h., D_E ist ein $+,\bar{e}$-System. Für $A \in \mathcal{M}$ ist dann D_A ein $+,\bar{e}$-System, das $\mathcal{M}$ umfasst, denn $\mathcal{M}$ ist ein $\cap$-System. Also gilt

$$A \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \mathcal{M}^{+,\bar{e}} \subset D_A$$

bzw. $\forall A \in \mathcal{M} \ \forall B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ ist $A \cap B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$

Für $B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ ist damit D_B ein $+,\bar{e}$-System, welches $\mathcal{M}$ enthält, so dass $\mathcal{M}^{+,\bar{e}} \subset D_B^{+,\bar{e}} = D_B$.

Also: $\forall A, B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ ist $A \in D_B$, d.h. $A \cap B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$, und das ist gerade die Beh..

Jetzt schreiben wir für $A, B \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$:

$A \setminus B = A \bar{e} (A \cap B) \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$, $A \cup B = A + (B \setminus A) \in \mathcal{M}^{+,\bar{e}}$,

woraus sich die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ zunächst unter $\setminus$ und dann unter $\cup$ ergibt. Damit erweist sich $\mathcal{M}^{+,\bar{e}}$ als ein Ring, der $\mathcal{M}$ enthält. Es folgt $r(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}^{+,e}$. $\square$

Def.: Ein Mengensystem $\mathcal{S} \neq \emptyset$ heißt ein <u>Semiring</u>, falls (1) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$;

(2) $A, B \in \mathcal{S}, B \subset A \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_n \in \mathcal{S} : A \bar{e} B = \sum_{i=1}^{n} C_i$.

Ein Semiring $\mathcal{S}$ mit $X \in \mathcal{S}$ heißt eine <u>Semialgebra</u>.

Bem. u. Bsp.: (1) Jeder Ring ist auch ein Semiring.

(2) Der Durchschnitt zweier Semiringe ist i. Allg. <u>kein</u> Semiring. Dazu ein

Bsp.: $X = \{0, 1, 2\}$. $\mathcal{S}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1,2\}\}$ und $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$ sind Semiringe auf X, aber $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1,2\}\}$ ist kein Semiring.

(3) $\{\emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in X\}$ ist ein Semiring auf X.

(4) $\{[a,b) \subset \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ ist (kein Ring aber) ein Semiring auf $\mathbb{R}$. (Hierbei kann man auch $(a,b]$ anstelle von $[a,b)$ verwenden.)

Semiringe treten in natürlicher Weise auf, wenn man Mengensysteme kartesischer Produkte betrachtet. Für $i \in \{1,2\}$ seien X_i Grundmengen und $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Mengensysteme. Dann bildet man

$$\mathcal{M}_1 \Box \mathcal{M}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{M}_1 \wedge A_2 \in \mathcal{M}_2\} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2),$$

lies: "Rechteck"

das System der sog. Rechteckmengen aus $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$.

Bem.: Sind $\mathcal{R}_{1,2}$ Ringe, so ist $\mathcal{R}_1 \Box \mathcal{R}_2$ i. Allg. kein Ring!

Lemma 4: Für $i \in \{1,2\}$ seien $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ Semiringe. Dann ist $\mathcal{S}_1 \Box \mathcal{S}_2$ ebenfalls ein Semiring.

Bew.: Seien $A = A_1 \times A_2$ und $B = B_1 \times B_2 \in \mathcal{S}_1 \Box \mathcal{S}_2$. Dann ist $A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{S}_1 \Box \mathcal{S}_2$.

Ist zudem $B_1 \times B_2 \subset A_1 \times A_2$, so gelten $B_i \subset A_i$ $(i \in \{1,2\})$. Dann existieren $C_{i,k} \in \mathcal{S}_i$ $(i \in \{1,2\},\ 1 \le k \le K^{(*)})$, sodass

$$A_1 \setminus B_1 = \sum_{k=1}^{K} C_{1,k} \quad \text{und} \quad A_2 \setminus B_2 = \sum_{j=1}^{K} C_{2,j}.$$

Damit erhalten wir

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = ((A_1 \setminus B_1) \times A_2 + B_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2)$$

$$= (A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2) + (A_1 \setminus B_1) \times B_2 + B_1 \times (A_2 \setminus B_2)$$

$$= \sum_{k,j=1}^{K} C_{1,k} \times C_{2,j} + \sum_{k=1}^{K} C_{1,k} \times B_2 + \sum_{j=1}^{K} B_1 \times C_{2,j},$$

und alle auftretenden Summanden liegen in $\mathcal{S}_1 \Box \mathcal{S}_2$.

(*) Fülle ggf. mit $\emptyset$ auf, um die gleiche Anzahl von Summanden zu erreichen!

Folgerung: Das System $\mathcal{Q}^{(n)} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aller achsenparallelen halboffenen Quader der Form

$$Q = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

ist ein Semiring. Das ergibt die wiederholte Anwendung des Lemmas auf den Semiring der halboffenen Intervalle aus Bsp. (4).

Satz 2: Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Semiring, so ist $r(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^+$.

Bem.: Hierbei ist $\mathcal{S}^+ = \{ \sum_{i=1}^{n} A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{S} \}$, denn die Menge rechts ist abgeschlossen unter $+$, umfasst $\mathcal{S}$ und ist in $\mathcal{S}^+$ enthalten.

Bew. (des Satzes): $\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S}) \Rightarrow \mathcal{S}^+ \subset r(\mathcal{S})^+ = r(\mathcal{S})$. Um $r(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}^+$ einzusehen, zeigt man, dass $\mathcal{S}^+$ ein Ring ist.

(i) Mit $\mathcal{S}$ ist auch $\mathcal{S}^+ \neq \emptyset$.

(ii) Zu $A, B \in \mathcal{S}^+$ existieren $S_1, \dots, S_n, T_1, \dots, T_m \in \mathcal{S}$, so dass
$$A = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad \text{und} \quad B = \sum_{j=1}^{m} T_j .$$

(iii) Hierfür ist $S_k \cap T_j \in \mathcal{S}$ und daher
$$A \cap B = \sum_{k,j} S_k \cap T_j \in \mathcal{S}^+.$$
$\mathcal{S}^+$ ist also $\cap$-abgeschlossen.

(iv) Ferner ist $S_k \setminus T_j = \sum_{\ell=1}^{r} C_\ell$ mit Elementen C_ℓ des Semirings $\mathcal{S}$, also gilt $S_k \setminus T_j \in \mathcal{S}^+$. Damit:

$$A\setminus B=\Big(\sum_{k=1}^{n} S_k\Big)\setminus\Big(\sum_{j=1}^{m} T_j\Big)=\sum_{k=1}^{n} S_k\setminus\Big(\sum_{j=1}^{m} T_j\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} S_k\cap\Big(\sum_{j=1}^{m} T_j\Big)^c \underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{de}}{=}} \sum_{k=1}^{n} S_k\cap\bigcap_{j=1}^{m} T_j^c$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m} S_k\cap T_j^c=\sum_{k=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{S_k\setminus T_j}_{\in \mathcal{S}^+}$$

$\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{S}^+$, weil $\mathcal{S}^+$ nach (iii) $\cap$- und p.d. $+$-abgeschlossen ist.

(v) $A\cup B=A+(B\setminus A)$. Also ist $\mathcal{S}^+$ auch $\cup$-abgeschl.. $\square$

<u>Folgerung</u>: $\mathcal{R}=\{\sum_{k=1}^{N} Q_k : N\in\mathbb{N}, Q_k\in\mathcal{Q}^{(n)}\}$ ist ein Mengenring auf dem $\mathbb{R}^n$. Dieser wird als <u>Ring der endlichen Quadersummen</u> bezeichnet.

<u>Def.</u> Ein Mengensystem $\emptyset\neq\mathcal{M}\subset\mathcal{P}(X)$ heißt ein σ-Ring, falls (1) $A,B\in\mathcal{M}\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{M}$,

(2) $A_n\in\mathcal{M}, n\in\mathbb{N}\Rightarrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{M}$.

Ein σ-Ring $\mathcal{M}$ mit $X\in\mathcal{M}$ heißt eine σ-Algebra.

Einfache <u>Bsp.</u>: (1) $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra.

(2) $\mathcal{R}=\{A\subset X: A$ ist höchstens abzählbar$\}$ ist ein σ-Ring, aber nur dann eine σ-Algebra, wenn X abzählbar ist. (Dann ist nämlich $\mathcal{R}=\mathcal{P}(X)$.)

Bez. und Bem.! Für ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ bezeichnen $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ den kleinsten $\mathcal{M}$ umfassenden σ-Ring und $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste $\mathcal{M}$ enthaltende σ-Algebra. Beide existieren und sind eindeutig bestimmt als der Durchschnitt aller σ-Ringe bzw. σ-Algebren, die $\mathcal{M}$ umfassen. (Vgl. Lemma 1)

Weitere Bem. zur Definition:

(1) Jeder σ-Ring $\mathcal{R}$ ist zugleich ein Ring, denn wg. $\mathcal{R} \neq \emptyset$ existiert $A \in \mathcal{R}$, sodass auch $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{R}$ auch $\cup$-abgeschlossen: In $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ wähle man $A_3 = A_4 = \ldots = \emptyset$. Ebenso ist jede σ-Algebra auch eine Algebra.

(2) Es seien $\mathcal{R}$ ein σ-Ring und $(A_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{R}$. Dann gehören auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$,

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ u. } \liminf \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

zu $\mathcal{R}$.

Bew.: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq 2}} (A_1 \setminus A_n)$ zeigt die Abgeschlossenheit unter $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$. Zusammen mit der $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$-Abgeschlossenheit (definierende ES (2)) ergeben sich die Aussagen über lim sup und lim inf.

(3) $\mathcal{A} \subset P(X)$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn

(i) $X \in \mathcal{A}$, (ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^c$, (iii) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Bew.: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so gelten (i) und (iii) per def. und (ii) folgt mit $A^c = X \setminus A$ aus der $\setminus$-Abgeschlossenheit einer σ-Algebra.

Umgekehrt: Wenn (i)-(iii) für $\mathcal{A}$ gelten, ist $\mathcal{A}$ auch $\cap$-abgeschlossen, vgl. Bem. (1) und (2). Die $\setminus$-Abgeschlossenheit folgt dann aus $A \setminus B = A \cap B^c$.

(4) Ist $\mathcal{R}$ ein σ-Ring, so gilt $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$.

Dies zeigt man wie Lemma 3 unter Verwendung von Bem. (2) anstelle der $\cap$-Abgeschlossenheit eines Rings. – Z.B. ist $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$ die von $\mathcal{R} = \{A \subset X : A \text{ ist abzählbar}\}$ erzeugte σ-Algebra. Aber auch das System $\{\emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in X\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$.

Schematische Zusammenfassung:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma\text{-Algebra} & \Longrightarrow & \text{Algebra} & \Longrightarrow & \text{Semialgebra} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\sigma\text{-Ring} & \Longrightarrow & \text{Ring} & \Longrightarrow & \text{Semiring}
\end{array}$$

Def. Ein System $\emptyset \neq \mathcal{M}o \subset \mathcal{P}(X)$ heißt monoton, falls

(1) $A_n \in \mathcal{M}o\ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \nearrow$ (d.h. $A_n \subset A_{n+1}$) $\Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}o$,

(2) — " — , $A_n \searrow$ (d.h. $A_n \supset A_{n+1}$) $\Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}o$.

Für ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ wird das von $\mathcal{M}$ erzeugte monotone System mit $M(\mathcal{M})$ bezeichnet.

Lemma 5: (1) Jeder σ-Ring ist ein monotones System.

(2) Jeder monotone Ring ist ein σ-Ring.

Bem.: Wir können auch sagen: Ein Ring ist genau dann monoton, wenn er ein σ-Ring ist.

Bew.: (1) folgt aus der Abgeschlossenheit eines σ-Rings unter $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$. (Def. u. Bem. (2))

(2) Seien $\mathcal{R}$ ein Ring und, für $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{R}$. Dann sind auch $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{R}$ und es gilt $B_n \subset B_{n+1}$.

Da $\mathcal{R}$ monoton ist, haben wir $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{R}$.

Die $\setminus$-Abgeschlossenheit gilt nach Vor., damit ist $\mathcal{R}$ ein σ-Ring.

Satz 3: Für jeden Ring $\mathcal{R}$ gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}(\mathcal{R})$.

Bew.: Nach Lemma 5 ist jeder σ-Ring monoton, daher gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{R})$. Zu zeigen ist also nur, dass $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ein σ-Ring ist. Aufgrund von Lemma 5 (2) ist es hierfür ausreichend, zu zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ein Ring ist. Für $A \subset X$ setzen wir

$$\mathcal{M}_A := \{B \subset X : A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}.$$

Dann gelten:

(1) $\forall A, B \subset X : A \in \mathcal{M}_B \Leftrightarrow B \in \mathcal{M}_A$,

(2) $\forall A \subset X$: $\mathcal{M}_A$ ist ein monotones System,

(3) $\forall A \in \mathcal{R} : \mathcal{R} \subset \mathcal{M}_A$ (da $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\cup, \setminus}$), insbes. ist dann $\emptyset \in \mathcal{M}_A$, $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$,

(4) $\forall A \in \mathcal{R} : \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{M}_A) = \mathcal{M}_A$.

Letzteres bedeutet: $\forall A \in \mathcal{R}$ und $\forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist $B \in \mathcal{M}_A$ und nach (1) auch $A \in \mathcal{M}_B$. Damit ist für alle $B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$: $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_B \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{M}_B) = \mathcal{M}_B$.

D.h.: $\forall A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist $A \in \mathcal{M}_B$, also $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ und $A \setminus B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ein Ring ist.

Def.: Ein nichtleeres System $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein

<u>Dynkin-System</u>, falls

(1) $A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$,

(2) $A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ bezeichnet $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ das von $\mathcal{M}$ erzeugte Dynkin-System.

<u>Bem.</u>: (1) Jeder σ-Ring ist ein Dynkin-System.

(2) Jedes Dynkin-System $\mathcal{D}$ ist monoton.

Bew. von (2): Für $A_n \uparrow$ und $A_n \in \mathcal{D}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{D}. \qquad (*)$$

Zum anderen: Allgemein gilt mit de Morgan

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap \bigcap_{n \geq 2} A_n = A_1 \setminus \Big(\bigcap_{n \geq 2} A_n\Big)^c = A_1 \setminus \bigcup_{n \geq 2} A_n^c.$$

Gilt nun $A_n \downarrow$, also $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$, so ist

$$= A_1 \setminus \bigcup_{n \geq 2} A_1 \cap A_n^c = A_1 \setminus \bigcup_{n \geq 2} A_1 \setminus A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n \geq 2} A_1 \setminus A_n,$$

wobei $A_1 \setminus A_n \uparrow$. Nach $(*)$ ist also $\bigcup_{n \geq 2} A_1 \setminus A_n \in \mathcal{D}$

und damit auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, sofern alle $A_n \in \mathcal{D}$ sind.

Satz 4: Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein nicht-leeres $\cap$-System, so gilt

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{R}(\mathcal{M}).$$

Bew.: Da jeder σ-Ring ein Dynkin-System ist, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{M})$. Zur umgekehrten Inklusion: Nach Satz 1 ist

$$r(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{+,\in} \subset \mathcal{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}(r(\mathcal{M})),$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(r(\mathcal{M})) \subset \mathcal{D}(\mathcal{D}(\mathcal{M})) = \mathcal{D}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{D}(r(\mathcal{M}))$$

und also $\mathcal{D}(r(\mathcal{M})) = \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Weiter ist

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{R}(r(\mathcal{M})) \underset{\uparrow \atop \text{Satz 3}}{=} M(r(\mathcal{M})) \underset{\uparrow \atop \text{Jedes Dynkin-System ist monoton}}{\subset} \mathcal{D}(r(\mathcal{M})) \overset{\text{oben}}{=} \mathcal{D}(\mathcal{M})$$

Mit der folgenden Definition wird das maßtheoretische Mengensystem "σ-Algebra" mit der Topologie, also dem System offener Mengen in Verbindung gebracht:

Def.: Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so heißt $\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$ die Borel-σ-Algebra auf X. Speziell für den $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen, von der Euklidischen Norm induzierten Topologie setzt man $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Bez.: Die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ werden häufig als Borelmengen (in X) bezeichnet.

Da Topologien oft etwas unübersichtlich sind, sucht man nach einfacheren Erzeugendensystemen für die Borel-σ-Algebra. Für $\mathcal{B}_n$ hat man:

Satz 5: Es sei $\mathcal{Q}^{(n)} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ das System aller Quader der Form $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$. Dann gilt $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{Q}^{(n)})$.

Zum Beweis benötigen wir:

Lemma 6: Jede offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung halboffener Quader aus $\mathcal{Q}^{(n)}$.

Bew.: Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir die Würfel
$$W_{m,k} := \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{m_i}{2^k} \leq x_i < \frac{m_i + 1}{2^k} \}.$$
Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} W_{m,k}$. Wir bilden
$$M := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{W_{m,k} \subset \Omega} W_{m,k},$$
so dass per def. $M \subset \Omega$. Um $\Omega \subset M$ einzusehen, sei $x \in \Omega$ gegeben. Da Ω offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Wir wählen k_0 so groß, dass $2^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon$. Dann gibt es genau ein $m_0 \in \mathbb{Z}^n$, so dass $x \in W_{m_0,k_0}$. Hierfür gilt $\operatorname{diam}(W_{m_0,k_0}) = 2^{-k_0}\sqrt{n} < \varepsilon$, so dass $x \in W_{m_0,k_0} \subset B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ und damit $x \in M$.

Bem.: Man kann sich etwas mehr Mühe geben und die Menge M als disjunkte Vereinigung von Würfeln schreiben. Dann gilt das Lemma auch mit dem Zusatz 'disjunkt' vor "Vereinigung", vgl. Forster, Otto: Analysis III, § 1, Lemma 1.

Bew. des Satzes: Ist τ die Topologie auf $\mathbb{R}^n$, so ergibt Lemma 6, dass $\tau \subset \sigma(\mathcal{Q}^{(n)})$. Hieraus folgt

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\tau) \subset \sigma(\mathcal{Q}^{(n)}).$$

Andererseits ist $\mathcal{Q}^{(n)} \subset \sigma(\tau)$, weil wir jeden Quader aus $\mathcal{Q}^{(n)}$ schreiben können als

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathop{\times}_{i=1}^{n} (a_i - \tfrac{1}{k}, b_i)}_{\text{offener Quader}} .$$

Daraus folgt $\sigma(\mathcal{Q}^{(n)}) \subset \sigma(\tau) = \mathcal{B}_n$, also Gleichheit. $\square$

Bem.: Die Eckpunkte der im Beweis von Lemma 6 verwendeten Würfel haben alle rationale Koordinaten. Ist $\mathcal{Q}^{(n)}_{\mathbb{Q}}$ das System aller Quader der Gestalt

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \quad \text{mit} \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q},$$

so gilt also $\mathcal{B}_n \subset \sigma(\mathcal{Q}^{(n)}_{\mathbb{Q}}) \subset \sigma(\mathcal{Q}^{(n)}) = \mathcal{B}_n$ und damit Gleichheit. Daher gibt es sogar ein abzählbares Erzeugendensystem für $\mathcal{B}_n$.