1.3 Diskussion

Das mehrdimensionale Riemann-Integral wurde 1892 von Camille Jordan entwickelt [1] und 1893 in die 2. Auflage seines Lehrbuches "Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique" aufgenommen. Für eine Vielzahl von Anwendungen ist es vollkommen ausreichend, einige davon werden wir in den Übungen besprechen. Konzeptionell ist seine Arbeit insofern wegweisend, als er eine Inhaltstheorie zur Grundlage der Integration macht. Wie wir gesehen haben, wird eine Klasse von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ [2] festgelegt (das Mengensystem der später so genannten Jordan-Bereiche nämlich), denen in sinnvoller Weise (als Grenzwert elementargeometrischer Volumina) ein Inhalt zugeordnet werden kann. Abstrakt formuliert erhalten wir mit dem Jordanschen Inhalt eine Abbildung

$$\varphi := \{\text{Jordanbereiche}\} \to [0,\infty), \quad J \mapsto |J|.$$

Diese sog. Mengenfunktion ist monoton ($J_1 \subset J_2 \Rightarrow |J_1| \le |J_2|$) und bei (im wesentlichen) disjunkter Vereinigung endlich additiv.

---

1) "Remarques sur les intégrales définies", in: Journal de Mathématiques pures et appliquées, 8, 1892, 69-99

2) bei Jordan tatsächlich: des $\mathbb{R}^2$

Allerdings startet Jordan in seinen Überlegungen beim Integral, was er von Riemann übernimmt und verallgemeinert, und steigt von da aus gewissermaßen ab zur Definition des Inhalts als Integral über die charakteristischen Funktionen. Natürlicher erscheint es, zuerst einen Inhalt bzw. ein Maß[1] auf einer geeigneten Klasse von Mengen festzulegen und auf dieser Basis das Integral zunächst für Treppenfunktionen[2] und dann für deren (monotone) Grenzwerte zu definieren. Genau so werden wir in Kapitel 2 verfahren, und tatsächlich wird sich die Konstruktion des Integrals als recht einfach erweisen, wenn man über die Grundlage einer ausgereiften Inhalts- bzw. besser: Maßtheorie verfügt.

Was ist an der Jordanschen Inhaltstheorie brauchbar, und inwiefern ist sie unausgereift? Was sind die Schwachstellen des (mehrdim.) Riemann-Integrals?

1. Jordans <u>Nullmengen</u> tragen der Tatsache Rechnung, dass es Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gibt, die

---

1) Bei einem Maß verlangt man nicht nur die endliche, sondern die abzählbar unendliche Additivität.

2) = Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.

in einem spezifischen Sinne so klein sind, dass sie vom Riemann-Integral übersehen werden. (Spezifisch insofern, als "inhaltstheoretisch klein" im Allgemeinen etwas anderes ist als etwa "mengentheoretisch klein", z.B. gibt es überabzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$, die Jordan-Nullmengen sind, vgl. Aufg. 1.) Sie sind ein nützliches, allerdings auch ausbaufähiges Konzept. Dazu zwei Beispiele:

(1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt und daher keine Jordan-Nullmenge, obwohl das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \chi_{\mathbb{N}}(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \chi_{\mathbb{N}}(x)\,dx = 0 \quad \text{ist.}$$

(2) Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$, so ist auch die beschränkte Menge $Q \cap \mathbb{Q}^n$ keine Jordan-Nullmenge, denn für die Ober- und Untersummen der char. Funktion bezüglich einer beliebigen Zerlegung Z von Q gilt

$$S(\chi_{\mathbb{Q}^n}, Z) = |Q|, \quad s(\chi_{\mathbb{Q}^n}, Z) = 0.$$

$\mathbb{Q}^n \cap Q$ kann man aber auch keinen positiven Inhalt zuordnen, was etwas unbefriedigend ist. Beide Probleme werden vermieden, wenn man von endlichen zu abzählbar unendlichen Überdeckungen übergeht. Genauer:

Def.: Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Lebesgue[1]-Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ mit höchstens abzählbar vielen Quadern existiert, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon$. (36)

Jede Jordan-Nullmenge ist also zugleich eine Lebesgue-Nullmenge. Die Umkehrung gilt nicht: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind Lebesgue-Nullmengen, aber keine Jordan-Nullmengen. Und nicht nur die endliche sondern auch die abzählbar unendliche Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge. Dementsprechend sollte auch die zugehörige Mengenfunktion nicht nur endlich, sondern abzählbar unendlich (man sagt: σ-) additiv sein. Das ist der Übergang vom Inhalt zum Maß, in diesem Fall zum Lebesgue-Maß.

Ein Vorteil dieser Modifikation ist, dass man beim Satz von Fubini ($\int_{Q\times R} f(x,y)\, d(x,y) = \int_Q \int_R f(x,y)\, dy\, dx$) feststellen kann, dass die Menge aller $x \in Q$, für die das Integral $\int_R f(x,y)\, dy$ <u>nicht</u> existiert, eine Lebesgue-Nullmenge ist. Insofern erhält dieser wichtige Satz eine zufriedenstellende Formulierung erst im

---

1) Henri Lebesgue, 1875–1941; legte mit seiner Dissertation (!) 1902 den Grundstein für die moderne Maß- u. Integrationstheorie

Rahmen der Lebesgue-Theorie (G. Fubini, 1908).

Etwas befremdlich ist die Sonderrolle, die Jordan in seiner Arbeit den Nullmengen zuweist. Wenn diese nicht kompakt sind, gehören sie *nicht* zum Definitionsbereich des von ihm eingeführten Inhalts. Naheliegender scheint es zu sein, dass die Nullmengen einfach diejenigen Mengen im Definitionsbereich der zu konstruierenden Mengenfunktion sind, für die diese den Wert Null annimmt. Man kann sich ja im Nachhinein noch darauf einigen, dass Teilmengen von Nullmengen ebenfalls Nullmengen sind – dies nennt man dann die Vervollständigung eines Maßes.

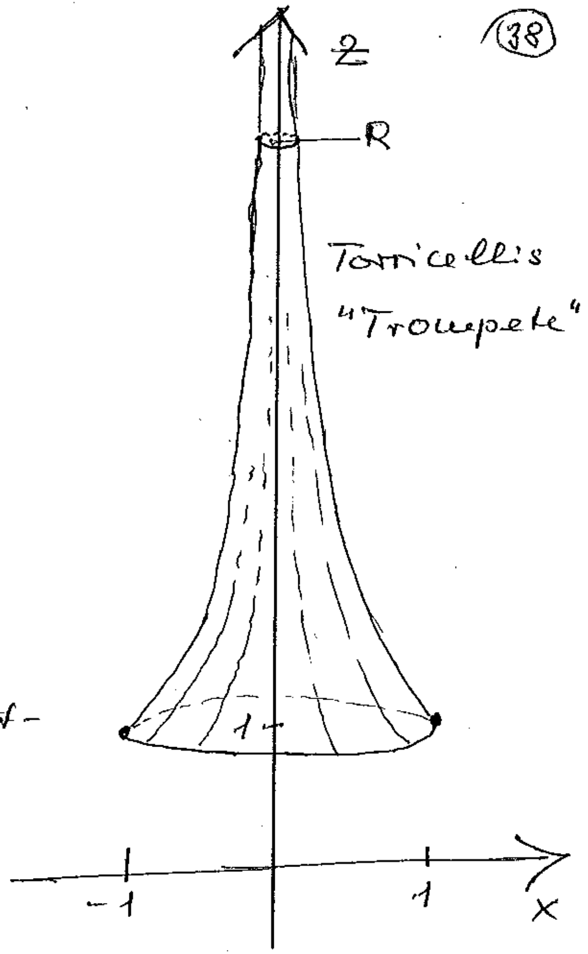
2. *Jordan-Bereiche* sind *stets* kompakt und daher *beschränkt.* Es gibt aber unendlich ausgedehnte Mengen, denen man in sinnvoller Weise ein endliches Volumen zuordnen kann. Eines der ältesten Beispiele (in 3 Dimensionen) hierfür ist "Torricellis[1] Trompete", die durch Rotation des Graphen der Funktion

$$f : [1,\infty) \longmapsto \mathbb{R}, \quad z \longmapsto f(z) := \frac{1}{z}$$

um die z-Achse entsteht. Torricelli zeigte bereits um 1643, dass das Volumen dieses Rotationskörpers endlich ist. Zudem interessant und

---

1) Evangelista Torricelli, 1608–1647, Schüler Cavalieris und Assistent Galileos



scheinbar paradox an diesem Bsp. ist, dass trotz des endlichen Volumens die Oberfläche dieser "Trompete" unendlich groß ist. Zur Berechnung des Volumens schneidet man den Körper in einer Höhe $R \gg 1$ ab, bestimmt den Jordan-Inhalt des abgeschnittenen unteren Teils und lässt anschließend $R \to \infty$ streben. Die rechnerischen Einzelheiten auszuführen, wird Ihnen sicherlich nicht schwerfallen und sei zur Übung empfohlen.

Damit ist man bei einem uneigentlichen Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$ angelangt. Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten, je nachdem, wie man z.B. eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ approximiert, um das Integral über Ω zu erklären. Eine praktikable Definition ist die folgende, die vom üblichen Vorgehen in einer Dimension deutlich abweicht.

Def. 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f auf Ω uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn f auf jedem Jordan-Bereich $J \subset \Omega$ Riemann-integrierbar ist und wenn für jede

Ausschöpfung $(J_m)_m$ von Ω mit Jordan-Bereichen der Grenzwert $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{J_m} f(x)dx$ existiert. In diesem Fall heißt $\int_\Omega f(x)dx := \lim\limits_{m\to\infty} \int_{J_m} f(x)dx$ das uneigentliche (39)

Riemann-Integral von f über Ω.

Hierbei ist $(J_m)_m$ eine Ausschöpfung von Ω, wenn für jedes kompakten $K\subset\Omega$ ein Index $M\in\mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m\geq M$ gilt $K\subset J_m$. Man muss sich dann überlegen, dass stets eine solche Ausschöpfung existiert und dass der Grenzwert unabhängig von der speziellen Folge $(J_m)_m$ ist.

Diese Version des uneigentlichen Riemann-Integrals weist schon deutliche Züge des Lebesgue-Integrals auf. z.B. ist eine stetige Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ genau dann im Sinne der obigen Definition uneigentlich integrierbar, wenn dies für $|f|$ der Fall ist. (Man schließt also die Möglichkeit lediglich integrierbarer aber nicht absolut integrierbarer Funktionen mit dieser Definition aus.) Genauso verhält es sich aber auch beim Lebesgue-Integral.

Im Rahmen dieses uneigentlichen Riemann-Integrals ist es aber immerhin möglich, eine Transformationsformel

$$\int_\Omega f(\varphi(x))\,|\det D\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)\,dy$$

für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ als (40)
Verallgemeinerung der Substitutionsregel zu zeigen. Der Beweis ist quälend und offenbart einen wesentlichen Mangel des Riemann-Integrals (eigentlich wie uneigentlich) an gut handhabbaren Konvergenzsätzen, die die Vertauschung von Integral und dem Grenzwert einer Funktionenfolge erlauben. Lediglich zwei solcher Grenzwertsätze stehen beim Riemann-Integral zur Verfügung, und beide setzen die gleichmäßige Konvergenz voraus:

(1) Für das eigentliche Integral auf Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$, bekannt aus Analysis I:

Sei $f_k : Q \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : Q \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f integrierbar und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_Q f_k(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx.$$

(2) Für das uneigentliche Integral auf offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wie oben definiert:

Es sei $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge u.e. integrierbarer Funktionen, die auf jedem kompakten $K \subset \Omega$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiere. Ferner existiere eine u.e. integrierbare Funktion $F : \Omega \to [0,\infty)$, so dass für alle $x \in \Omega$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_k(x)| \leq F(x)$. Dann ist $f: \Omega \to \mathbb{R}$ u.e. integrierbar und es gilt

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)dx .$$

(Die Fkt. F in diesem Satz wird als Majorante bezeichnet.)

Für Lebesgue-integrierbare Funktionen f_k, f kann man hierin die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz streichen. Lediglich die punktweise Konvergenz und die Existenz einer integrierbaren Majorante F sind erforderlich. Das ist der Lebesguesche Konvergenzsatz, der in einem sehr allgemeinen Rahmen Gültigkeit besitzt, und der ein wesentliches Ergebnis in Kap. 2 dieser Vorlesung sein wird.

3. Sowohl der Jordansche Inhalt als auch das Lebesgue-Maß wurden für den $\mathbb{R}^n$ entwickelt. Damit verbunden sind einige Eigenschaften eines Inhaltes bzw. Maßes, die uns selbstverständlich erscheinen, von denen wir uns aber für eine abstrakte Maß- und Integrationstheorie verabschieden müssen. Zum einen

sind das die geometrischen Eigenschaften wie Invarianz unter Translationen und Rotationen und die Skalierungseigenschaft ($|\lambda J| = \lambda^n |J|$ für $\lambda > 0$ und einen Jordan-Bereich J, entsprechendes gilt für das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$). Die Translationsinvarianz wird einer speziellen Klasse von Maßen, den sog. Haar-Maßen auf topologischen Gruppen vorbehalten bleiben. (Das Lebesgue-Maß ist ein solches Haar-Maß.)

Zum anderen benötigt eine schlüssige Maß- und Integrationstheorie spezifische Mengensysteme als Definitionsbereich von Maßen, auch wenn diese mit einer ggf. vorhandenen Topologie verträglich sein sollten. Jordans Rückgriff auf die topologische Struktur des $\mathbb{R}^n$ (System der kompakten Jordanbereiche für das eigentliche, der offenen Mengen für das uneigentliche Integral) erweist sich als zu einschränkend. Dazu ein recht schlichtes Bsp.: Kann man zwei Mengen A und B sinnvoll einen Inhalt (oder ein Maß) $|A|$ bzw. $|B|$ zuordnen und ist $B \subset A$, so erwarten wir

$$|A \setminus B| = |A| - |B|,$$

insbesondere also, dass $|A \setminus B|$ definiert ist. (43)
Aber weder die Offenheit noch die Kompaktheit von A und B bleiben bei der Differenzbildung erhalten.

Dementsprechend beginnen wir in Kapitel 2 mit der Einführung solcher Mengensysteme, die für die Maßtheorie geeignet sind.