1.2 Das n-dim. Riemann-Integral (Skizze)

Hier betrachtet man beschränkte Funktionen $f: Q \to \mathbb{R}$, wobei für feste $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$ im $\mathbb{R}$

$$Q = \{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \}$$

ein kompakter, achsenparalleler Quader mit den Kantenlängen $b_i - a_i$ ist. (Im Folgenden wird stets nur noch von "Quadern" die Rede sein, diese werden, falls nichts Gegenteiliges bemerkt wird, stets als kompakt und achsenparallel angenommen.) Das n-dimensionale Volumen eines solchen Quaders ist gerade das Produkt der Kantenlängen, also

$$|Q| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

sein Durchmesser ist die Länge der Raumdiagonalen:

$$\operatorname{diam}(Q) = \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um die Integrierbarkeit zu erklären, benutzt man Zerlegungen solcher Quader der Form $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_n$, wobei die $Z_i := \{ a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \ldots < x_p^{(i)} = b_i \}$ Zerlegungen der Intervalle $[a_i, b_i]$ sind. Q wird also vollständig mit einem (möglicherweise nicht regelmäßigen) Gitter überzogen, so dass sich eine Darstellung

$$Q = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$$

mit kleineren Quadern Q_k ergibt, die sich höchstens an den Randflächen überschneiden. Wir schreiben auch $Z = \{Q_1, \dots, Q_K\} = \{Q_k : 1 \le k \le K\}$. Als Feinheit einer solchen Zerlegung Z definiert man die Größe

$$\delta(Z) := \max_{k=1}^{K} \operatorname{diam}(Q_k),$$

das ist der größte Durchmesser eines Teilquaders Q_k der Zerlegung Z. Unter einer "ausgezeichneten Zerlegungsfolge" oder "Zerlegungsnullfolge" ist wie im Eindimensionalen eine Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen mit $\delta(Z_n) \to 0 \ (n \to \infty)$ zu verstehen.

Nun definiert man die Ober- und Untersummen von $f : Q \to \mathbb{R}$ bezüglich einer Zerlegung Z durch

$$S(f,Z) := \sum_{k=1}^{K} M_k |Q_k|, \quad M_k := \sup\{f(x) : x \in Q_k\}$$

und

$$s(f,Z) := \sum_{k=1}^{K} m_k |Q_k|, \quad m_k := \inf\{f(x) : x \in Q_k\}$$

Mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet man die Gesamtheit aller Zerlegungen der obigen Form. Dann heißen

$$\overline{\int_Q} f(x)\,dx := \inf\{S(f,Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$$

das obere bzw.

$$\underline{\int_Q} f(x)\,dx := \sup\{s(f,Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$$

das untere Riemann-Integral von f über Q.

stimmen beide überein, so heißt f Riemann-integrierbar über Q und man setzt

$$\int_Q f(x)\,dx := \overline{\int_Q} f(x)\,dx = \underline{\int_Q} f(x)\,dx.$$

Wie für Funktionen einer Veränderlichen sieht man ein: Ist $(Z_n)_n$ eine Zerlegungsnullfolge, so gelten

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \underline{\int_Q} f(x)\,dx \text{ und } \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \overline{\int_Q} f(x)\,dx.$$

Im Fall der Integrierbarkeit von f hat man also für beliebige Zerlegungsnullfolgen $(Z_n)_n$ und $(\tilde{Z}_n)_n$:

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, \tilde{Z}_n) = \int_Q f(x)\,dx.$$

Ebenfalls wie im Eindimensionalen beweist man das folgende Integrierbarkeitskriterium:

Satz 1: Eine beschränkte Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von Q existiert, so dass

$$S(f, Z_\varepsilon) - s(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Bem. Hierbei ist die Differenz von Ober- und Untersumme gleich der Schwankungssumme, also

$$S(f, Z) - s(f, Z) = \sum_{k=1}^{K} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in Q_k\}\, |Q_k|.$$

Auch die Riemannschen Zwischensummen können ganz analog zum eindimensionalen Fall definiert werden: Ist $Z = \{Q_1, \dots, Q_K\}$ eine Zerlegung eines Quaders Q, so wählt man aus jedem Teilquader ein Element $\xi_k \in Q_k \subset \mathbb{R}^n$ und setzt $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_K) \in \mathbb{R}^{n \cdot K}$ sowie

$$\sigma(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^{K} f(\xi_k)\, |Q_k| .$$

Mit Hilfe des Integrierbarkeitskriteriums (Satz 1) kann man zeigen, dass auch im Mehrdimensionalen die Riemannsche Charakterisierung der Integrierbarkeit bzw. des Integrals gilt:

Satz 2: Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f über Q Riemann-integrierbar, wenn für jede Zerlegungsnullfolge $(Z_n)_n$ und für jede Wahl der "Zwischenstellen" $\xi_k^{(n)} \in Q_k^{(n)}$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)})$$

existiert. In diesem Fall ist der Grenzwert stets derselbe und stimmt mit $\int_Q f(x)\,dx$ überein.

Als Folgerung hieraus erhält man einige einfache aber auch wichtige Eigenschaften des Riemann-Integrals:

(1) Linearität. Sind f und g auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ auf Q integrierbar und es gilt

$$\int_Q \lambda f(x) + \mu g(x) \, dx = \lambda \int_Q f(x) \, dx + \mu \int_Q g(x) \, dx.$$

Die Klasse der auf Q integrierbaren Funktionen bildet also einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{R}(Q)$, und das Integral definiert eine lineare Abbildung von $\mathcal{R}(Q)$ nach $\mathbb{R}$.

(2) Monotonie. Sind f und g wie in (1) und gilt $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in Q$, so ist auch

$$\int_Q f(x) \, dx \leq \int_Q g(x) \, dx.$$

Angewendet auf $\pm f(x) \leq |f(x)|$ ergibt sich die Dreiecksungleichung für Integrale, das ist

$$\left| \int_Q f(x) \, dx \right| \leq \int_Q |f(x)| \, dx ;$$

setzt man $m := \inf \{ f(x) : x \in Q \}$ und $M := \sup \{ f(x) : x \in Q \}$, so folgt aus der Monotonie der Mittelwertsatz der Integralrechnung, also

$$m \, |Q| \leq \int_Q f(x) \, dx \leq M \, |Q|.$$

Bisher haben wir wenig mehr getan, als die Konstruktion des Riemann-Integrals aus der Analysis I zu wiederholen – lediglich die Intervalle haben wir durch Quader ersetzt und die Zerlegungen entsprechend angepasst. In dieser Weise könnten wir fortfahren und das Integrierbarkeitskriterium in Satz 1 benutzen, um die Integrierbarkeit stetiger Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$ zu zeigen. Im Hinblick auf die Berechnung von Volumina ist das jedoch nicht ausreichend. Ist nämlich $K \subset Q$ ein in einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ enthaltenes Kompaktum, so ~~erklären~~ wollen wir den __Jordanschen Inhalt__ von K als

$$|K| := \int_K dx := \int_Q \chi_K(x)\,dx,$$

erklären, wobei $\chi_K(x) := \begin{cases} 1 : x \in K \\ 0 : x \notin K \end{cases}$ als __die charakteristische Funktion__ der Menge K bezeichnet wird. Die Menge der Unstetigkeitsstellen von χ_K ist gerade der Rand ∂K, und dieser sollte offenbar in einem inhaltstheoretischen Sinne so klein sein, dass er die Integrierbarkeit der ansonsten stetigen Funktion χ_K nicht zerstört. Um das in den Griff zu bekommen, führt man den Begriff der Jordan-Nullmenge ein:

Def.: Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine Jordan-Null-menge, falls gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Überdeckung

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$$

von N mit Quadern Q_k, $1 \le k \le K$, sodass

$$\sum_{k=1}^{K} |Q_k| < \varepsilon .$$

Beispiele und Bemerkungen:

(1) Jede endliche Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Jordan-Nullmenge.
Allgemeiner: Ist $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$, die nur endlich viele Häufungswerte $a^{(1)}, \dots, a^{(K)} \in \mathbb{R}^n$ besitzt, so ist die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder eine Jordan-Nullmenge.

Bew.: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählt man K Quader $Q_1, \dots, Q_K$ des Gesamtvolumens $\le \sum_{k=1}^{K} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ mit $a^{(k)} \in \mathring{Q}_k$ $(1 \le k \le K)$. Außerhalb dieser Quader liegen nur endlich viele Folgenglieder $a_{n_1}, \dots, a_{n_L}$, die man mit Quadern $R_1, \dots, R_L$ des Gesamtinhalt $\le \sum_{\ell=1}^{L} |R_\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ überdecken kann.

(2) Ist $Q = Q' \times [a_n, b_n]$ und $G_\varphi \subset Q$ der Graph einer stetigen Funktion

$$\varphi : Q' \to [a_n, b_n], \ x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \varphi(x') \begin{pmatrix} = x_n \text{ für} \\ x = (x', x_n) \in G_\varphi \end{pmatrix},$$

so ist G_φ eine Jordansche Nullmenge.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\varphi : Q' \to [a_n, b_n]$ gleichmässig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|\varphi(x') - \varphi(y')| < \frac{\varepsilon}{2|Q'|}$$

für alle $x', y' \in Q'$ mit $|x' - y'| < \delta$. Wählen wir eine Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_K\}$ von Q' der Feinheit $\delta(Z) \le \delta$ und setzen

$$M_k := \sup\{\varphi(x') : x' \in Q_k\}, \quad m_k := \inf\{\varphi(x') : x' \in Q_k\},$$

so ist $G_\varphi \subset \bigcup_{k=1}^{K} Q_k \times [m_k, M_k]$ mit dem Gesamtinhalt $= \sum_{k=1}^{K} |Q_k| \, (M_k - m_k) \le \frac{\varepsilon}{2|Q'|} \sum_{k=1}^{K} |Q_k| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

(3) Teilmengen von Jordan-Nullmengen sind ebenfalls Jordan-Nullmengen. Jede endliche Vereinigung von Jordan-Nullmengen ist wieder eine Jordan-Nullmenge. (Bew. ähnlich wie in (1)). Mit N ist auch $\overline{N}$ eine Jordan-Nullmenge. (Dieselben Überdeckungen sind ausreichend!)

(4) Jede Jordan-Nullmenge ist beschränkt. (Im Hinblick auf Integrale über unbeschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ hat sich das als Nachteil erwiesen.)

(5) Ist $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, $N \subset Q$ eine Jordan-Nullmenge und $f(x) = 0$ für alle $x \in Q \setminus N$, so ist f über Q Riemann-integrierbar und es gilt $\int_Q f(x)\,dx = 0$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $M := \sup\{|f(x)| : x \in N\}$. Wir wählen eine Überdeckung von N mit Quadern $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_K$ des Gesamtinhalts $\leq \sum_{k=1}^{K} |\tilde{Q}_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Durch Vergrößerung der Quader (von $\tilde{Q}_k$ zu Q_k) können wir erreichen, dass $N \subset \bigcup_{k=1}^{K} \mathring{Q}_k$ und $\sum_{k=1}^{K} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Ist dann $Z = \{Q_1, \ldots, Q_K\} \cup \{R_1, \ldots, R_L\}$ eine Zerlegung von Q, so ist $N \cap R_\ell = \emptyset \;\; \forall \ell \in \{1, \ldots, L\}$ und daher

$$S(f, Z) - s(f, Z) = \sum_{k=1}^{K} (M_k - m_k)|Q_k| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Satz 1 liefert die Integrierbarkeit von f. Ferner zeigt die Rechnung, dass $-\frac{\varepsilon}{2} < S(f, Z) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, woraus wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ die Gleichung $\int_Q f(x)\,dx = 0$ folgt.

Bem.: Mit (5) kann (z.B.) die Monotonieeigenschaft des Integrals etwas verschärft werden zu: Sind $f, g: Q \to \mathbb{R}$ integrierbar und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in Q \setminus N$, wobei $N \subset Q$ eine J-Nullmenge ist, so gilt

$$\int_Q f(x)\,dx \leq \int_Q g(x)\,dx.$$

(Es gibt eine ganze Reihe von Aussagen über Integrale, die in dieser Weise verallgemeinert werden kann.)

Mit einem ähnlichen Argument zeigen wir:

<u>Satz</u> 3: Es seien $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $N \subset Q$ eine Jordan-Nullmenge und $f: Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf $Q \setminus N$ stetig ist. Dann ist f auf Q Riemann-integrierbar.

<u>Bew.</u> Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $M := \sup\{|f(x)| : x \in Q\}$. Wie im Beweis von (5) finden wir Quader $Q_1, \dots, Q_K$, so dass $N \subset \bigcup_{k=1}^{K} \mathring{Q}_k$ und $\sum_{k=1}^{K} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Nun ist $Q \setminus \bigcup_{k=1}^{K} \mathring{Q}_k$ abgeschlossen und beschränkt und also kompakt (Wir befinden uns im $\mathbb{R}^n$!).
Daher ist $f: Q \setminus \bigcup_{k=1}^{K} \mathring{Q}_k \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, d.h.: es existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2|Q|}$ für alle $x, y \in Q \setminus \bigcup_{k=1}^{K} \mathring{Q}_k$ mit $|x-y| < \delta$.

Jetzt wählen wir eine Zerlegung $Z = \{R_1, \dots, R_L\}$ von Q der Feinheit $\delta(Z) < \delta$, so dass für ein $L_0 \in \{1, \dots, L\}$ gilt $\bigcup_{\ell=1}^{L_0} R_\ell = \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$. Dann ist

$$S(f, Z) - s(f, Z) = \sum_{\ell=1}^{L_0} (M_\ell - m_\ell)|R_\ell| + \sum_{\ell=L_0+1}^{L} (M_\ell - m_\ell)|R_\ell|$$

$$\leq 2M \cdot \sum_{k=1}^{K} |Q_k| + \frac{\varepsilon}{2|Q|} \cdot \sum_{\ell=L_0+1}^{L} |R_\ell|$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2|Q|} \cdot |Q| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Mit Satz 3 ist die folgende Definition für eine ausreichend große Klasse von Funktionen sinnvoll: (23)

Def. (1) Eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, dessen Rand ∂K eine Jordan-Nullmenge ist, wird als ein Jordan-Bereich bezeichnet.

(2) Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordan-Bereich und $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $J \subset Q$. Eine Funktion

$$f : J \to \mathbb{R} \, ; \quad x \longmapsto f(x)$$

heißt über J integrierbar, wenn ihre triviale Fortsetzung

$$f_J : Q \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_J(x) := \begin{cases} f(x) \, ; & x \in J \\ 0 \, ; & x \notin J \end{cases}$$

über Q integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_J f(x)\,dx := \int_Q f_J(x)\,dx$$

und nennen insbesondere $|J| := \int_J dx = \int_Q \chi_J(x)\,dx$ den Jordanschen Inhalt des Jordan-Bereichs J.

Bem. (1) Nach Satz 3 sind alle beschränkten Funktionen $f : J \to \mathbb{R}$ auf einem Jordan-Bereich J, die mit Ausnahme einer J-Nullmenge N stetig sind, über J integrierbar.

(2) Monotonie und endliche Additivität des Jordanschen Inhalts: $J_{1,2}$ seien Jordan-Bereiche. Dann gelten:

(i) Ist $J_1 \subset J_2$, so ist $|J_1| \le |J_2|$.

(ii) $J_1 \cup J_2$ und $J_1 \cap J_2$ sind Jordanbereiche und es gilt $|J_1 \cup J_2| + |J_1 \cap J_2| = |J_1| + |J_2|$. Insbesondere ist der Inhalt bei disjunkter Vereinigung (endlich) additiv.

Bew.: (i) folgt aus $|J| = \int_Q \chi_J(x)\,dx$, $J_1(x) \le J_2(x)$ und der Monotonie des Integrals.

(ii) folgt aus $\chi_{J_1 \cup J_2} + \chi_{J_1 \cap J_2} = \chi_{J_1} + \chi_{J_2}$ und der Linearität des Integrals.

(3) "Kompressionseigenschaft": Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $J \subset Q$ ein Jordanbereich. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Quader $Q_1, \dots, Q_K, Q_{K+1}, \dots, Q_L$, paarweise disjunkt bis auf Randflächen, so dass $\bigcup_{\ell=1}^{K} Q_\ell \subset J \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} Q_\ell$ und $\sum_{\ell=K+1}^{L} |Q_\ell| < \varepsilon$.

Insbes. ist $\underline{|J| - \varepsilon < \sum_{\ell=1}^{K} |Q_\ell| \le |J| \le \sum_{\ell=1}^{L} |Q_\ell| < |J| + \varepsilon}$.

Bew.: Da χ_J über Q integrierbar ist, gibt es nach Satz 1 zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_ε von Q, so dass $S(\chi_J, Z_\varepsilon) - s(\chi_J, Z_\varepsilon) < \varepsilon$. $Q_1, \dots, Q_L$ seien diejenigen Quader aus Z_ε mit $\sup\{\chi_{J}(x) : x \in Q_\ell\} = 1$, so dass $J \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} Q_\ell$ und $S(\chi_J, Z_\varepsilon) = \sum_{\ell=1}^{L} |Q_\ell|$.

$Q_1, \dots, Q_K$ seien diejenigen Quader aus Z_ε, die ganz (25)

in J enthalten sind, so dass auch $\inf\{\chi_J(x) : x \in Q_e\} \underset{=1}{}$

Dann ist $\bigcup_{e=1}^{K} Q_e \subset J$ und $s(\chi_J, Z_\varepsilon) = \sum_{e=1}^{K} |Q_e|$.

Also $\sum_{e=K+1}^{L} |Q_e| = \sum_{e=1}^{L} |Q_e| - \sum_{e=1}^{K} |Q_e| = S(\chi_J, Z_\varepsilon) - s(\chi_J, Z_\varepsilon) < \varepsilon$

(4) Für $N \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

(i) N ist eine Jordan-Nullmenge;

(ii) $\bar{N}$ ist ein Jordan-Bereich und $|\bar{N}| = 0$;

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ Jordanbereich J_ε mit $J_\varepsilon \supset N$ und $|J_\varepsilon| < \varepsilon$.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii) Mit N ist auch $\bar{N}$ eine Jordan-Nullmenge daher beschränkt (und abgeschlossen) und also kompakt (Es ist $N \subset \mathbb{R}^n$!). $\partial N \subset \bar{N}$ ist ebenfalls eine J.-Nullmenge und daher $\bar{N}$ ein Jordan-Bereich. Ferner gibt es zu $\varepsilon > 0$ Quader $Q_1, \dots, Q_K$ mit $\bar{N} \subset \bigcup_{k=1}^{K} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{Q} |Q_k| < \varepsilon$. Mit der Monotonie des Inhalts folgt:

$|\bar{N}| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Also $|\bar{N}| = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial. Wähle $J_\varepsilon = \bar{N}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es n. Vor. einen Jordan-Bereich J_ε mit $N \subset J_\varepsilon$ und $|J_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nach (3) gibt es Quader $Q_1, \dots, Q_L$ mit $J_\varepsilon \subset \bigcup_{e=1}^{L} Q_e$ und

$\sum_{e=1}^{L} |Q_e| \le |J_\varepsilon| + \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen also:

$N \subset \bigcup_{e=1}^{L} Q_e$ und $\sum_{e=1}^{L} |Q_e| < \varepsilon$. $\square$

Um konkrete mehrdimensionale Integrale zu berechnen, fasst man sie als iterierte eindimensionale Integrale auf. Das wird gerechtfertigt durch den folgenden

Satz 4 (Fubini light): Sind $Q \subset \mathbb{R}^m$, $R \subset \mathbb{R}^n$ Quader und

$$f : \mathbb{R}^{m+n} \supset Q \times R \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$$

Riemann-integrierbar, so gilt

$$\int_{Q\times R} f(x,y)\, d(x,y) = \int_Q \Big(\overline{\int_R} f(x,y)\, dy \Big) dx = \int_R \Big(\overline{\int_Q} f(x,y)\, dx \Big) dy .$$

Bei den inneren Integralen kann man ebenso das Unterintegral wählen.

Bem.: Die Funktionen $f(\cdot,y) : Q \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ bzw. $f(x,\cdot) : R \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ sind im allgemeinen nicht über Q bzw. über R integrierbar. (Daher wird der Satz in manchen Lehrbüchern auch nur für stetige Funktionen formuliert und ist dann für Volumenberechnungen u.ä. nicht anwendbar.)

Bew. des Satzes: Es seien $Z_Q = \{Q_1, \dots, Q_K\}$ und $Z_R = \{R_1, \dots, R_L\}$ Zerlegungen von Q bzw. von R. Dann ist $Z := Z_Q \times Z_R = \{ Q_k \times R_\ell : 1 \le k \le K, 1 \le \ell \le L \}$ eine Zerlegung von $Q \times R$, und jede Zerlegung von $Q \times R$ hat diese Gestalt. Wir setzen

$$m_{k,e} := \inf\{f(x,y) : (x,y)\in Q_k\times R_e\} \quad \text{und}$$

$$M_{k,e} := \sup\{f(x,y) : (x,y)\in Q_k\times R_e\}.$$

Dann ist

$$s(f,Z) = \sum_{k,e} m_{k,e}|Q_k\times R_e| = \sum_k \Big(\sum_e m_{k,e}|R_e|\Big)|Q_k|$$

$$\le \underline{\int_Q}\Big(\underline{\int_R} f(x,y)dy\Big)dx \le \overline{\int_Q}\Big(\overline{\int_R} f(x,y)dy\Big)dx$$

$$\le \sum_k\Big(\sum_e M_{k,e}|R_e|\Big)|Q_k| = \sum_{k,e} M_{ke}|Q_k\times R_e| = S(f,Z)$$

Jetzt bilden wir links das Supremum, rechts das Infimum und erhalten

$$\underline{\int_{Q\times R}} f(x,y)d(x,y) \le \underline{\int_Q}\Big(\underline{\int_R} f(x,y)dy\Big)dx$$

$$\le \overline{\int_Q}\Big(\overline{\int_R} f(x,y)dy\Big)dx \le \overline{\int_{Q\times R}} f(x,y)d(x,y).$$

Da f als integrierbar über $Q\times R$ vorausgesetzt ist, stimmen $\underline{\int_{Q\times R}} f(x,y)d(x,y)$ und $\overline{\int_{Q\times R}} f(x,y)d(x,y)$ und damit alle Ausdrücke in der letzten Ungleichungskette überein. Ebenso für die andere Integrationsreihenfolge. $\square$

Wiederholte Anwendung ergibt:

Folgerung: Ist $f: Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt im Sinne von Satz 4:

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \dots dx_1 .$$

Spezialfall: Das Cavalierische Prinzip

Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $J \subset Q \times [a,b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Jordan-Bereich, so ergibt Satz 4:

$$|J| = \int_{Q \times [a,b]} \chi_J(x,t)\,d(x,t) = \int_a^b \Big(\int_Q \chi_J(x,t)\,dx \Big)\,dt.$$

Nehmen wir weiter an, dass für alle $t \in [a,b]$ die Menge $J_t := \{ x \in Q : (x,t) \in J \}$ ein Jordan-Bereich im $\mathbb{R}^n$ ist, so gilt $\chi_{J_t}(x) = \chi_J(x,t)$ und

$$\int_Q \chi_J(x,t)\,dx = \int_Q \chi_{J_t}(x)\,dx = |J_t|,$$ also

$$|J| = \int_a^b |J_t|\,dt.$$

Das ist – mit Hilfe eines Integrals ausgedrückt – das Prinzip des Bonaventura Cavalieri, was dieser in den 1630er Jahren formulierte, vgl. Abschnitt 1.1.

Bsp.: Das Volumen der n-dimensionalen Kugel $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch $|\overline{B_R(0)}| = R^n \cdot \tau_n$, wobei τ_n das Volumen der n-dim. Einheitskugel bezeichnet. Hierfür gilt

$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad \text{und} \quad \tau_{2k+1} = \pi^k \cdot \prod_{j=0}^{k} \frac{2}{2j+1} \, . \qquad (*)$$

[Bem.: Mit Hilfe der für $x>0$ durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ definierten Γ-Funktion kann man dies verallgemeinern zu $\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. Dazu muss man neben $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ auch wissen, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ist. Letzteres muss ich Ihnen erst noch zeigen.]

(i) $\overline{B_R(0)}$ ist ein Jordan-Bereich. Die Kompaktheit ist offensichtlich. Den Rand $\partial B_R(0)$ können wir stückweise als Graph von

$$\varphi_\pm : \mathbb{R}^{n-1} \supset \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^n; \quad x' := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \pm\sqrt{R^2 - |x'|^2}$$

darstellen, so dass $\partial B_R(0)$ eine J.-Nullmenge ist (vgl. Bsp. (2) zum Begriff der J.-Nullmenge, S. 20).

(ii) Es ist $|\overline{B_R(0)}| = \int_{[-R,R]^n} \chi_{\overline{B_R(0)}}(x)\,dx$ mit $\chi_{\overline{B_R(0)}}(x) =$

$$\chi_{[-R,R]}(x_1)\, \chi_{[-\sqrt{R^2-x_1^2},\, \sqrt{R^2-x_1^2}]}(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi_{[-\sqrt{R^2-|x'|^2},\, \sqrt{R^2-|x'|^2}]}(x_n),$$

so dass

$$|\overline{B_R(0)}| = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \cdots \int_{-\sqrt{R^2-|x'|^2}}^{\sqrt{R^2-|x'|^2}} dx_n \ldots dx_1 \, .$$

Jetzt substituiert man $x_k = R\xi_k$ u. "$dx_k = R\,d\xi_k$", so dass (8c)

$$\ldots = R^n \cdot \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}} \cdots \int_{-\sqrt{1-|\xi'|^2}}^{\sqrt{1-|\xi'|^2}} d\xi_n \ldots d\xi_1 = R^n \cdot \tau_n .$$

(iii)

Nun ist

$$\tau_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{|B_{\sqrt{1-|\xi_1|^2}}(0)|}_{\subset \mathbb{R}^{n-1}} \, d\xi_1 = \tau_{n-1} \cdot \int_{-1}^{1} (1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_1$$

$$\Longrightarrow \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} = 2 I_n \text{ mit } I_n = \cancel{2} \cdot \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi$$

Die Subst. $\xi = \sin(t)$ u. $d\xi = \cos(t)dt$ ergibt (Pythagoras!)

$$I_n = \cancel{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt. = \int_0^{\pi/2} \underset{f'}{\sin(t)} \cdot \underset{g}{\cos^{n-1}(t)} dt.$$

Bei der angedeuteten partiellen Integration fallen die Randterme weg, so dass mit $\frac{d}{dt}\cos^{n-1}(t) = (n-1)\cos^{n-2}(t)(-\sin(t))$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \cdot \cos^{n-2}(t)dt \overset{\text{Pythagoras}}{=} (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n$$

$$\Longrightarrow \quad n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_{n-2} .$$

(iv) Wir multiplizieren mit I_{n-1} und erhalten

$$n \cdot I_n \cdot I_{n-1} = (n-1)\, I_{n-1} I_{n-2} = \ldots = 1 \cdot I_1 \cdot I_0$$

$$= 1 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t)dt \cdot \frac{\pi}{2} = \sin(t)\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow I_n \cdot I_{n-1} = \frac{\pi}{2n} \Longrightarrow \frac{\tau_n}{\tau_{n-2}} = 2 I_n \cdot 2 I_{n-1} = \frac{2\pi}{n} .$$

Also haben wir für τ_n die Rekursionsformel

$$\tau_n = \frac{2\pi}{n} \cdot \tau_{n-2}$$

gezeigt. Beachtet man noch $\tau_1 = 2$ und $\tau_2 = \pi$, so ergibt sich (*) induktiv.

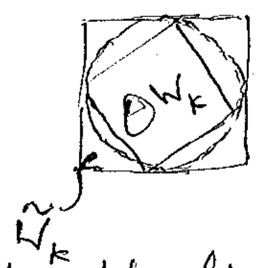
Die Invarianz des Jordanschen Inhalts unter Translationen (3e)
ist leicht einzusehen, ebenso das Verhalten unter Streckungen längs der Koordinatenachsen (→ Übungen, Aufg. 3).
Die Rotationsinvarianz hingegen erfordert hingegen ein zwar elementares aber etwas trickreiches Argument und sei daher hier ausgeführt:

Satz 5: Es sei $O: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Drehung und $J \subset \mathbb{R}^n$ ein Jordan-Bereich. Dann ist auch OJ ein Jordan-Bereich und es gilt $|OJ| = |J|$.

Bew.: Da O stetig ist, ist mit J auch OJ kompakt. Zu $\varepsilon > 0$ existieren Würfel $W_1, \dots, W_K$ (abgeschlossen und achsenparallel), so dass $\partial J \subset \bigcup_{k=1}^{K} W_k$ und $\sum_{k=1}^{K} |W_k| < \frac{\varepsilon}{n^{n/2}}$. Nun ist

$$\partial OJ = O\partial J \subset \bigcup_{k=1}^{K} OW_k \subset \bigcup_{k=1}^{K} \tilde{W}_k ,$$

wobei $\tilde{W}_k$ achsenparallele Würfel mit demselben Mittelpunkt wie OW_k sind. Ist r_k die Kantenlänge von W_k, so ist die Kantenlänge von $\tilde{W}_k$ abschätzbar durch $r_k \cdot \sqrt{n}$, $\Rightarrow |\tilde{W}_k| \le |W_k| \, n^{\frac{n}{2}}$, also $\sum_{k=1}^{K} |\tilde{W}_k| < \varepsilon$.



Der Kugeldurchmesser ist gerade $\sqrt{n}$-mal die Kantenlänge von W_k

Also ist ∂OJ eine Jordan-Nullmenge und damit OJ ein Jordan-Bereich.

Nun sei $W_r := [0,r]^n$ (so dass $|W_r| = r^n$) und $\alpha := |OW_1|$.

Dann ist $\alpha > 0$ und nach Aufg. 3

$$|O(W_r + c)| = |rOW_1 + Oc| = r^n |OW_1| = \alpha |W_r + c|.$$

Ist $R = \bigcup_{k=1}^{K} W_{(k)}$ mit achsenparallelen Würfeln $W_{(k)}$, wobei die Vereinigung bis auf Randflächen disjunkt sei, so ergibt sich hieraus

$$|OR| = |\bigcup_{k=1}^{K} OW_{(k)}| = \sum_{k=1}^{K} |OW_{(k)}| = \alpha \sum_{k=1}^{K} |W_{(k)}| = \alpha |R|.$$

Nun sei J ein Jordanbereich und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existieren endliche Vereinigungen $R_\pm$ achsenparalleler Würfel mit $R_- \subset J \subset R_+$, so dass

$$|J| - \varepsilon \le |R_-| \le |J| \le |R_+| \le |J| + \varepsilon.$$

Dann ist weiter $OR_- \subset OJ \subset OR_+$ und daher $|OR_-| \le |OJ|$ $\le |OR_+|$ $\Rightarrow$ $\alpha(|J| - \varepsilon) \le \alpha |R_-| \le |OJ| \le \alpha |R_+| \le \alpha(|J| + \varepsilon)$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt $|OJ| = \alpha |J|$. Mit $J = \overline{B_1(0)}$, so dass $OJ = J$, folgt $\alpha = 1$. $\square$