

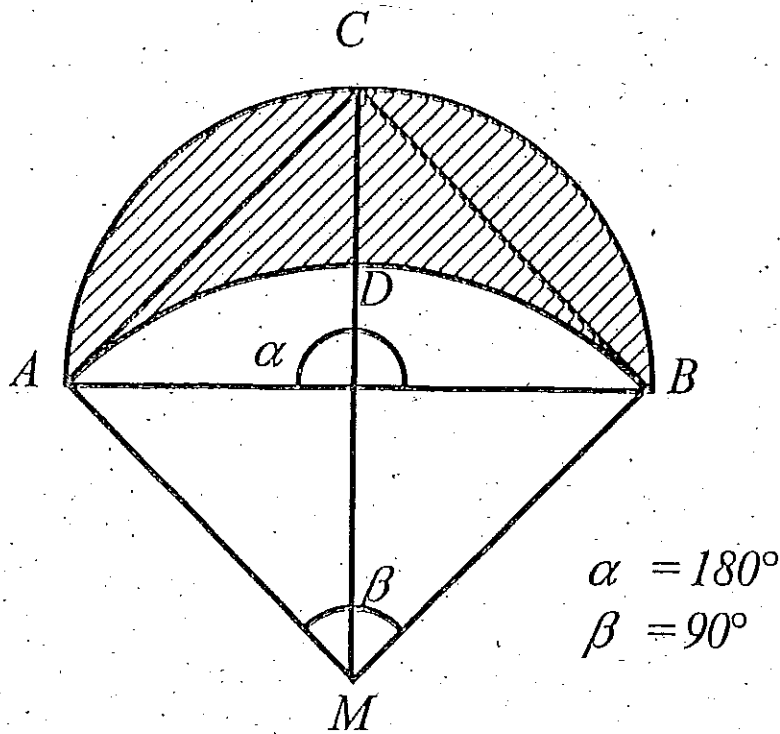
(Maß- und Integrationstheorie; Integrationen über Mannigfaltigkeiten und Integralsätze)

Kap. 1: Einfeldung. Das  $n$ -dimensionale Riemann-Integral

1.1 Historisches zum Inhaltsproblem

Die mehrdimensionale Integration und allgemeiner die moderne Maß- und Integrationstheorie haben ihren Ursprung in dem Problem der Bestimmung der Flächeninhalte und Volumina von nicht geradlinig begrenzten Flächen und Körpern. Diese Fragestellung hat schon früh die Mathematiker der Antike beschäftigt; bereits im 5. Jhdt. v. Chr. berechnete Hippokrates von Chios exakt den Flächeninhalt der nach ihm benannten "Mondchen", vgl. die Abb. auf S. ②. Laut dem Mathematikhistoriker Rüdiger Thiele wurde damit erstmalig der Inhalt kreisförmig begrenzter Flächenstücke berechnet.<sup>1)</sup> Eudoxos von Knidos (vermutlich 408-355 v. Chr.) begründete die Methode der Ausschöpfung (lat.: Exhaustio, dieser Begriff wird allerdings erst im 17. Jhdt. geprägt). Hierbei werden kreisförmig begrenzte Flächen oder Körper von innen angequält durch die endliche disjunkte Vereinigung von Quadraten,  $n$ -Ecken o.ä., denen in nahe liegender

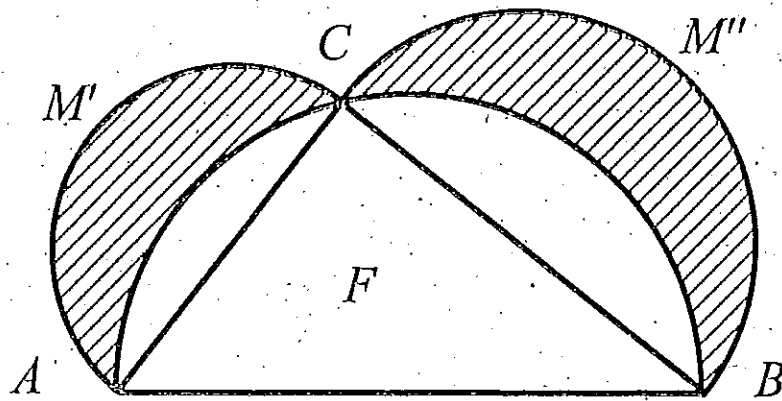
<sup>1)</sup>R. Thiele: Antike. in [7], Kap. I, 1.3.2



$$\alpha = 180^\circ$$

$$\beta = 90^\circ$$

Die Fläche des schraffierten "Möndchens" stimmt überein mit dem Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .



$$M' + M'' = F$$

Der Inhalt beider schraffierten Flächen zusammen ist identisch mit der Fläche  $F$  des Dreiecks  $ABC$ . Ein bisweilen in der Schule behandelter Fall, der verwechelt (laut Thiele) auf Ibn al-Haitam zurückgeht.

Weise ein elementargeometrischer Inhalt zuge- (3)  
ordnet werden kann. (Die Inhaltsberechnungen z.B.  
von Pyramide und Kegel, die im XII. Buch der "Ele-  
mente" des Euklid zu finden sind, werden Eu-  
doxos zugeschrieben. Die "Elemente" wurden um  
300 v. Chr. in Alexandria verfasst.)

Immer höchsten Stand erreichte die "Integrations-  
theorie" des antiken Griechentums im Werk des  
Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.), der  
u.a. die "Auslöpfungsmethode" des Eudoxos  
zu einer "Kompressionsmethode" weiterentwickelte.  
Dabei ist die Approximation einer gegebenen  
Fläche (bzw. Körpers) durch einfache Figuren von  
innen und außen zu verstehen. Auf diese Weise  
gewann er z.B. mit Hilfe eines alten Euklids-  
Kreis ein- bzw. Kreisbeschreibenden 96-Ecks die  
Näherung

$$3 \frac{10}{71} = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3 \frac{1}{7}.$$

(Tatsächlich ist ein Vorgehen etwas komplizierter  
insoweit, als er den Kreisumfang und nicht den  
Flächeninhalt approximiert. Vgl. [7], Abschnitt  
1.3.5)

Diese Kompressionsverfahren können wir rund 2100 (4)

Jahre später wiederfindet sie der Darboux'sche Darstel-  
lung des Riemann-Integrals, in der die Fläche unter-  
halb des Graphen einer beschränkten Funktion  $f: [a, b] \rightarrow$   
 $[0, \infty)$  von innen und außen approximiert wird durch  
die Unter- und Obersummen der Funktion bezüglich  
feinerer Zerlegungen  $Z$  des Grundintervalls.

Neben einigen anderen ist Archimedes bekannt  
für seine Entdeckung des Hebelgesetzes. Dessen  
Anwendung ist verbunden mit dem Begriff des  
Schwerpunkts eines starren Körpers  $K \subset \mathbb{R}^3$ , unter-  
halb dessen man ~~setzen~~ bekanntlich "den  
Hebel ansetzen" muß, um die Hebelwirkung aus-  
zunutzen. Unter der Voraussetzung konstanter  
Dichte können wir den Schwerpunkt von  $K$  an-  
schreiben als das  $\mathbb{R}^3$ -wertige Integral

$$S(K) := \frac{1}{|K|} \int_K x \, dx,$$

wobei  $|K|$  das Volumen von  $K$  bezeichnet und  
das Integral über den räumlichen Bereich  $K$  na-  
türlich erst noch erklärt werden sollte. Dessen  
ungeachtet bestimmt Archimedes erfolgreich die  
Schwerpunkte einzelner Körper, z. B. den einer Halb-  
kugel und eines Kugelsegments. Vgl. [7], Ab-  
schnitt 1.4.2. In dem späteren Abschnitt 1.4.5

verleiht der Autor (R. Theile) übrigens entscheiden die ⑤  
Frage, ob Archimedes einen Integralbegriff hatte.

Ist Archimedes und seinem Zeitgenossen Apollonius (von Perge, ca. 260-190 v. Chr.; das ist der Zeit der Kegelschnitte) endet der Höhenflug der griechischen Mathematik. Im Anschluss gibt es nur noch vereinzelt Erkenntnisse zum Inhaltsproblem. Bemerkenswert sind allerdings die Formeln des Pappos von Alexandria für das Volumen und die Oberfläche von Rotationskörpern. Diese wurden zu Beginn des 17. Jahrhunderts wieder bzw. neu entdeckt von Habakuk Paul Guldin (1577-1643, Prof. für Mathematik in Graz und Wien) und ab 1635 veröffentlicht. Seitdem sind sie unter der Bezeichnung "Guldinische Regeln" bekannt. Die erste dieser Regeln lautet:

"Wenn eine ebene Figur um eine äußere, in der Ebene gelegene Achse rotiert, so ist das Volumen des erzeugten Rotationskörpers gleich der Fläche der Figur multipliziert mit dem Umfang des Kreises, den ihr Schwerpunkt beschreibt."

(zitiert aus [W1], S. 292). Die entsprechende Aussage über die Oberfläche von Rotationskörpern wird als zweite Guldinische Regel bezeichnet. In den Übungen wollen wir darauf (zumindest auf die erste dieser Regeln) zurückkommen.

6  
Dass wir hier einen Zersprung von 13 Jahrhunderten gemacht haben, ist vollkommener Brechigkeit, denn aus der Zwischenzeit gibt es zum Inhaltspunkte nichts zu berichten. Zu Beginn des 17. Jahrhunderts setzt dann jedoch eine rasante Entwicklung ein; die erste einschlägige Veröffentlichung aus dieser Zeit ist Keplers 1615 erscheinende Abhandlung "Nova Stereometria Solidorum Vivationum" (Neue Stereometrie der Weinfässer, kurz: Fassmessung. Das Titelblatt sehen Sie auf der nächsten Seite, die gleiche Referenz ist [K].) Abgesehen von den Weinfässern geht es hierin ebenfalls um Volumenerhebungen von Rotationskörpern. Zum Teil werden bekannte Resultate von Archimedes mit einer neuen Methode hergeleitet, darüber hinaus betrachtet Kepler auch solche Körper, die durch Rotation einer Fläche um eine Achse entstehen, die keine Symmetrieachse der gedrehten Fläche ist. Auf diese Weise entstehen Äpfel, Oliven, Zitronen und ähnliches Obst und Gemüse. Bemerkenswert ist die dabei vorgehensweise: Die Rotationskörper werden geschnitten mit einer Serie koaxialer Zylinderwände. Die so entstehenden, als unendlich dünn angesehenen ringförmigen Scheiben (oder Röhren) werden aufgeschnitten, ausgerollt, zum Teil gedreht und dann neu geschichtet, so dass ein Körper entsteht (z.B. ein schräger Zylinderabschnitt), dessen

NOVA  
STEREOMETRIA  
DOLIORVM VINARIORVM, IN PR  
mis Austriaci, figuræ omnium  
aptissimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBI  
cæ compendiosissimus & pla  
ne singularis.

Accessit

STEREOMETRIÆ ARCHIM  
edæ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæs. Matthiæ  
ejusq; fidd. Ordd. Austriæ supra Anasum  
Mathematico.

*Cum privilegio Cæsareo ad annos X<sup>VI</sup>.*

Volumen bekannt ist oder sich mit Elementargeo-  
metrischen Methoden bestimmen lässt, Kepler zeigt  
sich dabei als sehr kreativ und fantasievoll.  
Anhand von "Keplers Apfel" möchte ich Ihnen  
gerne eine weitere Tutorien-Eine Methode genauer  
erläutern. (Sie können auch nachlesen in der Re-  
ferenz [5].)

Mit der Zerlegung eines Körpers in unendlich dün-  
ne Schichten wendet Kepler bereits praktisch an,  
was sein Bologneser Kollege Bonaventura Cavalieri  
(1598-1647, Schüler Galilei's und ab 1629 erster  
Inhaber eines Lehrstuhls für Mathematik an der  
Universität von Bologna) zwanzig Jahre später in  
seiner Schrift "Geometria indivisibilibus" (1635)  
als Prinzip der Geometrie der Indivisiblen (= Un-  
zerlegbaren) formulieren wird:

"Wenn die Schnitt-, welche die Ebene einer paral-  
lelen Ebenenschar an zwei Körpern erzeugen, ein-  
ander gleich groß sind, so haben beide Körper das-  
selbe Volumen."

(Zitiert nach [W1], S. 131) Entsprechendes gilt  
für Flächen, die von einer Schar paralleler Geraden  
geschnitten werden. Dieses "Cavalieri'sche Prinzip"  
enthält bereits das Wesentliche eines wichtigeren  
Satzes (von Torricelli nämlich), den wir im weiteren  
Verlauf der Vorlesung besprechen werden und der es



man erlaubt, mehrdimensionale Integrale auf ⑨  
eindimensionale zurückzuführen. Obwohl diese  
im Hinblick auf das Cavalieri'sche Prinzip nahe-  
liegende Vorgehensweise vielfach bereits früher an-  
gewandt wird, gelingt eine korrekte und voll-  
ständige Formulierung des entsprechenden Satzes  
erst Guido Fubini (1879-1943) im Jahr 1907,  
und zwar im Rahmen der Lebesgueschen Integra-  
tionstheorie. Vorläuferversionen etwa für das mehr-  
dimensionale Riemann-Integral (vgl. Abschnitt 1.2)  
sind zwar für viele Anwendungen gut praktikabel,  
aber vom theoretischen Standpunkt aus wenig zu-  
friedenstellend.

Noch einmal zurück ins 17. Jahrhundert: Unabhän-  
gig voneinander entwickelten Newton in den 1660er  
und Leibniz in den 1670er Jahren die Differential-  
rechnung. Unter dem Einfluss Barrow (1630-1677),  
eines Lehrers Newtons, dessen Schriften auch Leibniz  
zur Kenntnis gekommenen hat, gelangen beide zum  
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,  
was u.a. zur Folge hat, dass in den folgenden 150  
Jahren - bis zu Cauchy's Cours d'Analyse (1821)  
und Riemanns Habilitationsschrift (1853) -  
die Integration im Wesentlichen als Antidifferen-  
ziation aufgefasst wird.

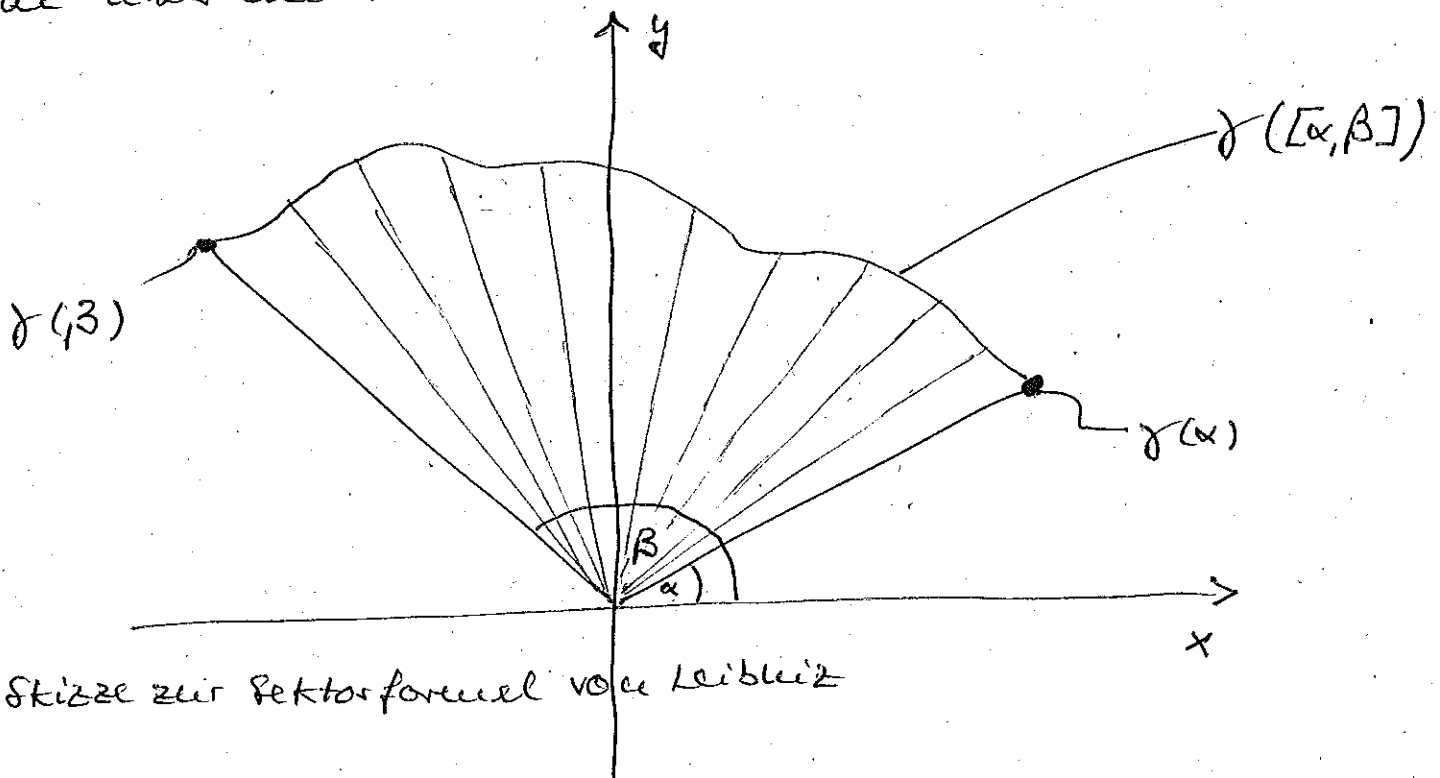
Im Hinblick auf die Integration über Kurven in der Ebene, Flächen im Raum etc., allgemein über Mannigfaltigkeiten im  $n$ -dimensionalen Raum, womit wir uns im dritten Teil der Vorlesung beschäftigen werden, ist allerdings noch eine Erkenntnis von Leibniz erwähnenswert, nämlich seine Sektorformel: Für  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$  sei

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

differenzierbar und  $A$  der Flächeninhalt des von den Strecken  $\{\lambda \gamma(\alpha) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ,  $\{(1-\lambda)\gamma(\beta) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$  und dem Bild  $\Gamma := \{\gamma(t) : \alpha \leq t \leq \beta\}$  von  $\gamma$  eingeschlossenen Sektors. Dann kann dieser nach

$$A = \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt \right|$$

berechnet werden, was häufig in der für Sie noch nicht offensichtlichsten Form  $A = \frac{1}{2} \left| \int x dy - y dx \right|$  als Integral über die Kurve  $\Gamma$  angegeben wird.



Ist  $\gamma$  in Polarkoordinaten gegeben, also durch (11)

$$x(t) = r(t) \cos(t), \quad y(t) = r(t) \sin(t),$$

so nimmt diese Formel die landliche Gestalt

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 dt$$

an. Die Umkreisberechnung nachzurechnen, sei als einfache Übungsaufgabe gestellt. Wenn  $t \mapsto r(t)$  konstant ist, erhält man  $A = \frac{1}{2} (\beta - \alpha) r^2$  als Flächeninhalt des Kreissektors mit Radius  $r$ . Welchen Flächeninhalt hat eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ ? Sie können es auch mit dem vierblättrigen Kleeblatt versuchen, das man für  $r(t) = r_0 (1 + \cos(2t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , erhält. (Eine Abbildung dazu und ggf. auch die Lösung finden Sie in [W1], S. 286.)

Es scheint merkwürdig zu sein, dass wir den Inhalt der zweidimensionalen Sektorfläche als Integral über die eindimensionale Kurve  $\Gamma$  bzw. über das Intervall  $[\alpha, \beta]$  erhalten. Die Erklärung ist simpel: Beim Beweis wird für eine allgemeine Abstandsfunction  $r(t)$  die Integration in Radialrichtung bereits ausgeführt, so dass in konkreten Anwendungen nur noch die Integration nach der Winkelvariable  $t \in [\alpha, \beta]$  zu berechnen bleibt. Die Verallgemeinerung dieses Vorgehensweise führt auf den Gaußschen Integralsatz

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx = \int_{\partial K} f(x) \nu_k(x) dS_x,$$

das es erlaubt, Oberflächenintegrale in Volumenintegralen zu überführen und umgekehrt. Hierbei ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter mit hinreichend glattem Rand  $\partial K$  und  $\nu(x)$  die äußere Einheitsnormale am Punkt  $x \in \partial K$ .  $\int_{\partial K} \dots dS_x$  bezeichnet die Integration über die Fläche  $\partial K$ , eine Operation, die wir im dritten Teil der Vorlesung überhaupt erst definieren müssen. Ich habe hier eine etwas unübliche Formulierung des Integralgesetzes gewählt. Diese deutet an, dass man von der linken Seite der Gleichung zur rechten durch Anwendung des Hauptsatzes bezüglich der Variablen  $x_k$  gelangt, was tatsächlich das wesentliche Argument im Beweis ist.

Damit sind wir am Ende dieser kurzen historischen Einführung angelangt. Da bei ein erstes Semester des Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen gelernt haben, starten wir in Abschnitt 1.2 mit einer Skizze des mehrdimensionalen Riemann-Integrals. Das wird bei zügig in die Lage versetzen, eine Reihe konkreter Aufgaben zu lösen (Berechnung von Volumen und Schwerpunkten wie oben angesprochen, darüber hinaus von Trägheitsmomenten u.ä.). Zugleich werden wir einige Unzulänglichkeiten des Riemann-Integrals feststellen, die zur Weiterentwicklung zur abstrakten Maßtheorie Anlass geben.