Lösung & Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

WiSe 2020/21
31.03.2021

Klausur zu Analysis III

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel sind (außer Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen und eine Liste unbestimmter Integrale gleichen Umfangs zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammeltwird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Eine Reihe von Maßen)	8 Punkte
A3 (Konvergenzsätze für Integrale)	8 Punkte
A4 (Rotationssymmetrische Funktionen in L^p)	7 Punkte
A5 (Faltung)	8 Punkte
A6 (Höldersche Ungleichung)	9 Punkte
A7 (Bogenlänge und Flächeninhalte)	14 Punkte

Die Klausur gilt mit 26 (von 64 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(1) Ist $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nach dem Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ integrierbar, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(2) Ist $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und stetig, so gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Antwort: richtig ○ falsch ☒ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(3) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch f Lebesgue-integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda_1(x)$.

Antwort: richtig ○ falsch ☒ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(4) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen. Dann heißt eine Abbildung $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ Immersion, falls ihre Jacobi-Matrix Rang $n-k$ hat.

Antwort: richtig ○ falsch ☒ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(5) Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, so ist seine Vervollständigung ebenfalls σ-endlich.

Antwort: richtig ☒ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Aufg. 2: Es seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(\mu_k)_k$ eine Folge von Maßen $\mu_k : \mathcal{A} \to [0,\infty]$. Zeigen Sie:

(a) Durch $\mu(A) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(A)$ wird ein Maß

$\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definiert. $\qquad 2+6=8$ P.

(b) Ist $f : X \to [0,\infty)$ $\mathcal{A}$-messbar, so gilt

$$\int f \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f \, d\mu_k . \qquad (*)$$

Lös.: (a) $\mu(\emptyset) \underset{\text{p.d.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(\emptyset) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 0 = 0.$ 1P.

$$\mu\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \underset{\text{p.d.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \overset{\mu_k \text{ Maße}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_k(A_n)$$

$$\underset{\substack{\text{Tonelli oder}\\ \text{Ana I}}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k(A_n) \underset{\text{p.d.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \qquad 1\text{P.}$$

(b) • $(*)$ gilt p.d. für χ_A, wenn $A \in \mathcal{A}$. 1P.

• Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und gilt $(*)$ für $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$, so gilt

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu \quad (\text{Linearität des } \textstyle\int)$$

$$\underset{(*) \text{ für } f,g}{=} \alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f \, d\mu_k + \beta \sum_{k\in\mathbb{N}} \int g \, d\mu_k$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha \int f \, d\mu_k + \beta \int g \, d\mu_k \quad \left(\begin{array}{l}\text{Eigenschaft von}\\ \text{Reihen}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int \alpha f + \beta g \, d\mu_k \quad (\text{Linearität des } \textstyle\int)$$

2P.

Noch zu A2 (b):

Nun sei $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{M}^+(X,\mathcal{A})$, so dass

(i) (*) gilt $\forall f_n, n\in\mathbb{N}$ und (ii) $f_n \nearrow f$. 1P.

Dann erhalten wir mit drei Beppo Levi-Anwendungen

$$\int f\,d\mu \overset{BL}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \underset{Vor.}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f_n\,d\mu_k$$

$$\overset{B.L.}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu_k \overset{B.L.}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f\,d\mu_k .$$ 2P.

(Damit gilt (*) für alle $f\in\mathcal{M}^+(X,\mathcal{A})$.)

Aufg. 3: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $\qquad 3+2+3=8$ P.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} n\, e^{-|4nx-n^2|}\, dx$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^{3/2}} \cdot \sin^n(x)\, dx$.

Geben Sie auch die integrierbare Majorante an, wenn Sie den Lebesgueschen Konvergenzsatz verwenden.

Lös.: (a) punktweiser Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$,

also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \chi_{(-1,1)}(x) \quad \lambda_1$-f.ü. $\qquad$ 1P.

Integrierbare Majorante: $\chi_{(-1,1)}(x) + \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ 1P.

Mit Lebesgue: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{(-1,1)}(x)\, dx = 2$ $\qquad$ 1P.

(b) Mit der Substitution $y = 4nx - n^2$, $dy = 4n\, dx$; 1P.

erhält man $\int\limits_{\mathbb{R}} n \cdot e^{-|4nx-n^2|}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-|y|}\, dy$

$= \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^\infty e^{-y}\, dy = \frac{1}{2}$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} n e^{\dots} dx = \frac{1}{2}$. 1P.

(c) punktweiser Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^n(x)}{|x|^{3/2}} = 0 \quad \lambda_1$-f.ü. $\qquad$ 1P.

Majorante: $\chi_{(-1,1)}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} + \chi_{[1,\infty)}(|x|) \cdot |x|^{-3/2}$ $\qquad$ 1P.

Folgerung mit Lebesgue: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n(x)}{|x|^{3/2}}\, dx = 0$ $\qquad$ 1P.

<u>A4</u>: Es sei $p \in [1,\infty)$ vorgegeben. Untersuchen Sie, für welche $\alpha, \beta > 0$ die Funktionen

(rotationssymmetrische Funktionen in L^p)

(a) $f_\alpha(x) := \chi_{(0,1)}(|x|)\cdot|x|^{-\alpha}$ bzw.

(b) $g_\beta(x) := \chi_{(1,\infty)}(|x|)\cdot|x|^{-\beta}$ 4+3=7 P.

zu $L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$ gehören. Berechnen Sie in diesem Fall $\|f_\alpha\|_p$ und $\|g_\beta\|_p$, die Oberfläche ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel müssen Sie dabei nicht genauer bestimmen.

<u>Lös.</u>: (a) $\|f_\alpha\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,1)}(|x|)\,|x|^{-\alpha p}\,d\lambda_n(x)$ 1P.

für die klassische p-Norm. Gibt's nur einmal, ggf. bei (b)

$= \omega_n \cdot \int_0^1 r^{n-1-\alpha p}\,dr$ <u>1P.</u>

Dieses Integral existiert genau dann, wenn $n-1-\alpha p > -1$ ist, also wenn $n > \alpha p$ bzw. $\alpha < \frac{n}{p}$. 1P.

In diesem Fall ergibt sich weiter

$$\ldots = \omega_n \cdot \frac{1}{n-\alpha p}\cdot r^{n-\alpha p}\Big|_0^1 = \frac{\omega_n}{n-\alpha p},$$

also $\|f_\alpha\|_p = \left(\frac{\omega_n}{n-\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}$. <u>1P.</u>

(Vorl. zu 'rotationssymmetrische Fktn. in L^p')

(b) $\|g_\beta\|_p^p = \omega_n \cdot \int_1^\infty r^{n-1-\beta p}\, dr$ 1P.

konvergiert g.d.w. $n-1-\beta p < -1$ ist bzw. $\frac{n}{p} < \beta$. 1P.

In diesem Fall:

$$\dots = \omega_n \cdot \frac{r^{n-\beta p}}{n-\beta p}\Big|_1^\infty = \frac{\omega_n}{\beta p - n},$$

d.h. $\|g_\beta\|_p = \left(\frac{\omega_n}{\beta p - n}\right)^{\frac{1}{p}}$. 1P.

Aufg. 5 (Faltung): Es seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{L}_n, \lambda_n)$. $(1+1+2+1+1+2=8P.)$

(a) Geben Sie die Definition der Faltung $f*g$ von f und g an.

(b) Zeigen Sie: Sind f und g gerade, so ist auch $f*g$ gerade.

(c) Welche Aussage ergibt Ihre Rechnung zu (b), wenn

(i) f gerade und g ungerade ist,

(ii) f und g ungerade sind?

(d) Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei $\tau_a f(x) := f(x-a)$. Zeigen Sie, dass

$(\tau_a f) * (\tau_b g) = \tau_{a+b}(f*g)$.

(e) Für eine invertierbare ~~Matrix~~ $n \times n$-Matrix A sei

$A^* f(x) := f(Ax)$. Zeigen Sie:

$$(A^* f) * (A^* g) = \frac{1}{|\det(A)|} A^*(f*g).$$

(f) Ist die Faltung zweier rotationssymmetrischer integrierbarer Funktionen ebenfalls rotationssymmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung der Aufgabe zur Faltung:

(a) $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$ 1P.

(b.) $f * g(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x-y)\, g(y)\, dy$ (Parität)

$z = -y$ (Trafoformel.) $= \int_{\mathbb{R}^n} f(-x+z)\, g(-z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\, g(z)\, dz$

$= f * g(x)$ 1P.

(c) In (i) handelt man sich an der Stelle (Parität) ein (−)-Zeichen ein, in (ii) sind es gleich zwei, also ein (+). Daher: $f*g$ ist in

(i) ungerade (ii) gerade je 1P.

(Nur die Aussagen bewerten!)

(d) $(\tau_a f) * (\tau_b g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_a f(x-y)\, \tau_b g(y)\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-a)\, g(y-b)\, dy \overset{z=y-b,\ \text{Trafoformel}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a-b-z)\, g(z)\, dz$

$= f * g(x-a-b) = \tau_{a+b}(f*g)(x).$ 1P.

(e) $(A^* f) * (A^* g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} A^* f(x-y)\, A^* g(y)\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax-Ay)\, g(Ay)\, dy$ $z = Ay \Rightarrow$ "$dz = |\det A|\, dy$" (wieder Trafoformel)

$= \frac{1}{|\det(A)|} \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax-z)\, g(z)\, dz$

$= \frac{1}{|\det(A)|} \cdot f*g(Ax) = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot A^*(f*g)(x)$ 1P.

(f) Ja. (1P.) Für $R \in O(n)$ und $\det R = 1$ ergibt (e):

$f*g(x) = (R^* f) * (R^* g)(x) = R^*(f*g)(x) = f*g(Rx)$ 1P.

Aufg. 6 (Höldersche Ungleichung) $2+4+3=9$ P.

(a) Geben Sie die Höldersche Ungleichung und ihre Voraussetzungen bezüglich der Hölder-Exponenten an.

(b) Unter welchen Voraussetzungen an p, p_1, p_2 gilt

$$\|fg\|_p \le \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2} \quad ?$$

Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

(c) Unter welchen Voraussetzungen an die Hölder-Exponenten gilt

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_p \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i} \quad ?$$

Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

Lös.: (a) $\int |fg|\, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$ 1P.

wenn $1 \le p, p' \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 1P.

$1<p,p'<\infty$ oder $1<p<\infty$ ... sind auch ok.

(b) Beh.: Gilt für $1 \le p, p_1, p_2 \le \infty$, wenn $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. 1P.

Bew.: $\|f \cdot g\|_p^p = \int |f|^p |g|^p \, d\mu \underset{\text{Hölder}}{\le} \| |f|^p \|_q \, \| |g|^p \|_{q'}$, 1P.

wenn $1 \le q, q' \le \infty$ und $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$

Fortsetzung Lösung Hölder (Teil (b))

$$\ldots = \|f\|_{pq}^{p} \; \|g\|_{pq'}^{p} \qquad 1P.$$

Wir wählen $q \geq 1$, so dass $p \cdot q = p_1$ ist, also $\frac{1}{q} = \frac{p}{p_1}$.

Dann ist $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q} = p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}\right) = \frac{p}{p_2}$, also $pq' = p_2$. 1P.

(Zieht man noch die p-te Wurzel, folgt die Beh.)

(c) Beh.: Gilt, wenn $1 \leq p, p_i \leq \infty$ und $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$ 1P.

Bew.: Per Induktion über $n \geq 2$, wobei der Fall $n=2$ in (b) erledigt wurde. 1P.

$$n \to n+1: \left\| \prod_{i=1}^{n+1} f_i \right\|_p \underset{(b)}{\leq} \left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_q \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \quad \left(\text{wenn: } \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p_{n+1}}\right)$$

$$\underset{\text{I.V.}}{\leq} \left(\prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i} \right) \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} \quad \left(\text{wenn: } \frac{1}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{p_i} \qquad 1P.$$

(Besser ist es natürlich, am Anfang zu sagen: Wir wählen $\frac{1}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. Dann gilt nach (b) ....)

Aufg. 7 (Bogenlänge und Flächeninhalte) Berechnen Sie

(a) die Bogenlänge der logarithmischen Spirale

$3+5+6=14$ P.

$$LS := \{ e^{-t}(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 : t > 0 \},$$

(b) die Fläche des Hyperboloiden ~~H~~

$$H := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1,\ z = xy \},$$

(c) die Fläche der durch

$$\varphi : (0,2\pi) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ (t,u) \mapsto \varphi(t,u) := \begin{pmatrix} e^{-u}\cos(t) \\ e^{-u}\sin(t) \\ \int_0^u \sqrt{1-e^{-2v}}\,dv \end{pmatrix}$$

parametrisierten oberen Hälfte der Pseudosphäre.

<u>Lös.</u>: (a) Für $\varphi(t) = e^{-t}(\cos(t), \sin(t))$ ist

$$\varphi'(t) = -e^{-t}(\cos(t), \sin(t)) + e^{-t}(-\sin(t), \cos(t)) \qquad 1P.$$

und damit ~~wg~~ $(\cos(t), \sin(t)) \perp (-\sin(t), \cos(t))$

$$|\varphi'(t)|^2 = 2e^{-2t}, \text{ also } |\varphi'(t)| = \sqrt{2}\cdot e^{-t}. \qquad 1P.$$

Es folgt

$$\sigma(LS) = \int_0^\infty \sqrt{2}\cdot e^{-t}\,dt = \sqrt{2}\left(-e^{-t}\Big|_0^\infty\right) = \sqrt{2} \qquad 1P.$$

(b) Wir haben $H = G_f$ für $f : B_1(0) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = xy$.

Hierfür ist $\nabla f(x,y) = (y,x)$ und also $|\nabla f(x,y)|^2 = x^2+y^2$. 1P.

Für die Parametrisierung von H als Graph von f,

also $\varphi : B_1(0) \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) := (x,y,xy)$

erhalten wir daraus die Gramsche Determinante

$$g_\varphi(x,y) = 1+|\nabla f(x,y)|^2 = 1+x^2+y^2 .$$ 1P.

Es folgt

$$\sigma(H) = \int_{x^2+y^2<1} \sqrt{1+x^2+y^2}\, d(x,y)$$ 1P.

Polarkoordinaten $= 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, r\, dr$ 1P.

$$= \frac{2\pi}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$$ 1P.

(c) Für φ wie angegeben ist

$$D\varphi(t,u) = \begin{pmatrix} e^{-u}(-\sin(t)) & -e^{-u}\cos(t) \\ e^{-u}\cos(t) & -e^{-u}\sin(t) \\ 0 & \sqrt{1-e^{-2u}} \end{pmatrix}$$

1P. 1P.

und damit

$$G_\varphi(t,u) = D\varphi(t,u)^T D\varphi(t,u) = \begin{pmatrix} e^{-2u} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2P.

Hieraus folgt mit $g_\varphi(t,u) = e^{-2u}$ 1P.

$$\sigma(\text{Pseudosphäre}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \sqrt{g_\varphi(t,u)}\, dt\, du$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = 2\pi .$$ 1P.