Tut. am 10.02.21 – Lösungen

(1) Zu "rotationssymmetrische Funktionen":

(a) $$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,R)}(|x|)\, \ln(|x|)\, dx = \omega_n \cdot \int_0^R \ln(r)\, r^{n-1}\, dr$$

Partielle Integration ergibt

$$\int_\varepsilon^R \underbrace{\ln(r)}_{f} \cdot \underbrace{r^{n-1}}_{g'}\, dr = \ln(r)\, \frac{r^n}{n}\Big|_\varepsilon^R - \int_\varepsilon^R \frac{1}{r}\, \frac{r^n}{n}\, dr .$$

Für $\varepsilon \to 0$ also

$$\int_0^R \ln(r)\, r^{n-1}\, dr = \frac{1}{n} \cdot \left(\ln(R)\, R^n - \int_0^R r^{n-1}\, dr \right)$$

$$= \frac{R^n}{n} \left(\ln(R) - \frac{1}{n} \right),$$ insgesamt also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,R)}(|x|)\, \ln(|x|)\, dx = \omega_n \cdot \frac{R^n}{n} \left(\ln(R) - \frac{1}{n} \right).$$

(b) Den Anfang machen wir gleich etwas allgemeiner:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|) \cdot |x|^{2k} \cdot e^{-|x|^2}\, dx$$

$$= \omega_4 \cdot \int_0^R r^{2k} \cdot e^{-r^2} \cdot r^3\, dr$$

$$= \frac{\omega_4}{2} \cdot \int_0^R r^{2(k+1)}\, e^{-r^2}\, 2r\, dr$$

Subst. $t = r^2$, $dt = 2r\,dr$

$$\ldots = \frac{\omega_4}{2} \cdot \int_0^{R^2} t^{k+1} e^{-t}\, dt$$

Gefragt ist nach $k \in \{0,1\}$, das ist mit partieller Integration machbar:

$$\int \underset{f}{t}\, \underset{g'}{e^{-t}}\, dt = -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -(t+1) \cdot e^{-t}$$

und gleich nochmal

$$\int t^2 e^{-t} dt = \int \underset{f}{t}\, \underset{g'}{(t \cdot e^{-t})}\, dt$$

$$= -t(t+1)e^{-t} + \int (t+1)e^{-t} dt$$

$$= -(t(t+1) + t+1 + 1)e^{-t}$$

$$= -(t^2 + 2t + 2)e^{-t}.$$ Einsetzen ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|) e^{-|x|^2} dx = \frac{\omega_4}{2} \left(-(t+1) \cdot e^{-t}\right) \Big|_0^{R^2}$$

$$= \frac{\omega_4}{2} \left(1 - (1+R^2)e^{-R^2}\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|) |x|^2 \cdot e^{-|x|^2} dx = \frac{\omega_4}{2} \left(-(t^2+2t+2)e^{-t}\right) \Big|_0^{R^2}$$

$$= \frac{\omega_4}{2} \left(2 - (R^4 + 2R^2 + 2)e^{-R^2}\right)$$

(Aus Symmetriegründen ist das letzte Integral gerade $\frac{1}{4}$ davon!)

Lösung zu (2): Wir starten mit

(a) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, d\lambda_n(x) = \int_0^\infty \lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : e^{-|x|^2} > t\})\, dt$$

$$= \int_0^1 \lambda_n(\{x\in\mathbb{R}^n : e^{-|x|^2} > t\})\, dt \qquad \text{weil } e^{-|x|^2} \leq 1\,!$$

Nun ist $\quad e^{-|x|^2} > t$

$$\iff e^{|x|^2} < \frac{1}{t}$$

$$\iff |x|^2 < \ln\left(\frac{1}{t}\right),$$

d.h. die betrachtete Menge ist eine Kugel vom Radius $R(t) = \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$. Für deren Volumen gilt: $\lambda_n(B_{R(t)}(0)) = \tau_n \cdot R(t)^n = \tau_n \cdot \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Damit sind wir angekommen bei

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, d\lambda_n(x) = \tau_n \cdot \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}} dt$$

Subst. $s = \ln\left(\frac{1}{t}\right) \leadsto ds = \frac{1}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{-1}{t^2}\, dt = -\frac{dt}{t}$

bzw. $dt = -e^{-s}\, ds\,, \quad t=0 \iff s=\infty,\ t=1 \iff s=0.$

$$\ldots = \tau_n \cdot \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-s}\, ds = \tau_n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

wie behauptet.

(b) Für $n=2$: Fläche Einheitskreis!

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} d\lambda_2(x) = \tau_2 \, \Gamma(2) = \pi \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = \pi$$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

(c) Fubini und Funktionalgleichung ergeben

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\lambda_n(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda_1(x)\right)^n$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} d\lambda_2(x)\right)^{\frac{n}{2}} \underset{(b)}{=} \pi^{n/2}.$$

(a) und (c) zusammen ergeben also

$$\pi^{n/2} = \tau_n \, \Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right) \quad \text{bzw.} \quad \tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Insbesondere haben wir für $n=1$:

$$\sqrt{\pi} = \tau_1 \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+1\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right),$$

was die Zusatzfrage beantwortet.