(1) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>rotationssymmetrisch</u>, wenn es eine Funktion $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = g(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(Gleichwertig: $f(x) = f(Ox)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $O \in O(n)$.) Für solche Funktionen haben wir bei der Diskussion zu den n-dim. Kugelkoordinaten (Abschnitt 2.5.3., S. 110 ff.) festgestellt, dass

$$\int_{B_R(0)} f(x)\, d\lambda_n(x) = \omega_n \cdot \int_0^R g(r)\, r^{n-1}\, d\lambda_1(r),$$

wobei $\omega_n = n\tau_n$ die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel und τ_n deren Volumen ist (vgl. Thema (2) der heutigen Sitzung). Wir können auch $\int_{B_R(0)} f(x)\,dx = \omega_n \int_0^R g(r)\, r^{n-1}\, dr$ schreiben oder

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \omega_n \int_0^\infty g(r)\, r^{n-1}\, dr$$

oder Ähnliches.

Aufg.: Berechnen Sie die Integrale

(a) $$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(0,R)}(|x|) \cdot \ln(|x|)\, dx$$

in beliebigen Raumdimensionen $n \geq 2$ und

(b) in Raumdimension $n = 4$:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|) \cdot e^{-|x|^2}\, dx \,,$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|)\, |x|^2 e^{-|x|^2}\, dx \,,$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_{(0,R)}(|x|)\, x_i^2\, e^{-|x|^2}\, dx \,.$$

(2)
Wir haben in Aufgabe 46 die sog. "Layer-cake"-Darstellung

$$\int_X |f|^p d\mu = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})\, dt$$

der p-Norm einer Funktion $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit Hilfe des Satzes von Tonelli gezeigt.

Bem.: (1) Fubini + Tonelli sind wichtig!

(2) Historisch interessant: Den Fall $p = 1$, $f \geq 0$ der obigen Darstellung, also

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\})\, dt \qquad (*)$$

hat Lebesgue (im wesentlichen) in seiner Dissertation benutzt, um das Integral nach einem Maß zu definieren.

(3) Wir haben in Abschnitt 1.2 der Vorlesung sehr elementar aber auch etwas mühsam das Volumen der n-dim. Einheitskugel berechnet zu

$$\tau_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

wobei ich $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ später nachgereicht habe (Polarkoordinaten und Fubini).

Hier möchte ich Ihnen (in Form einer Aufgabe) zeigen, wie man diese Identität mit Hilfe der Darstellung (*) einsehen kann:

Aufg.: Wählen Sie in (*) $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda_n$ und $f(x) = e^{-|x|^2}$.

(a) Zeigen Sie: $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \, d\lambda_n(x) = \tau_n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

(Hierfür benötigen Sie außer (*), dass $\lambda_n(r \cdot A) = r^n \lambda_n(A)$, was ein häufig verwendeter Spezialfall der Transformationsformel für lineare Abbildungen ist.)

(b) Folgern Sie, dass $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} \, d\lambda_2(x) = \pi$, und

(c) weiter mit Fubini, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} \, d\lambda_n(x) = \pi^{n/2}.$$

(Beachten Sie, dass (a) und (c) $\pi^{n/2} = \tau_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ liefern!)

Ist damit auch $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ gezeigt?