Lösungen der Tutoriumsaufgaben vom 03.02.21

A1 Behauptet wird für $x, y > 0$, $p, p' > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

die Ungleichung $\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{p'}\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{p'}}$,

wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$ die Gammafkt. ist.

Lös.: Man schreibt

$$t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} - 1} \cdot e^{-t} = t^{\frac{x-1}{p}} \cdot e^{-\frac{t}{p}} \cdot t^{\frac{y-1}{p'}} e^{-\frac{t}{p'}} = f(t) \cdot g(t),$$

so dass $f(t)^p = t^{x-1} e^{-t}$ und $g(t)^{p'} = t^{y-1} \cdot e^{-t}$.

Dann ist

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{p'}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{p'} - 1} e^{-t} \, dt = \int_0^\infty f(t) g(t) \, dt$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \, \|g\|_{p'} = \left(\int_0^\infty f(t)^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty g(t)^{p'} \, dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} \, dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \, \Gamma(y)^{\frac{1}{p'}}$$

Zusatzfrage nach der Konsequenz für

$$\ln\circ\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

Antwort: Mit den Eigenschaften des ln haben wir

$$\ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{p'}\right)\right) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \ln\left(\Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\,\Gamma(y)^{\frac{1}{p'}}\right) \overset{\text{Rechenregeln}}{=} \frac{1}{p}\ln(\Gamma(x)) + \frac{1}{p'}\ln(\Gamma(y))$$

Mit $\lambda = \frac{1}{p'}$ wie vorgeschlagen, also $\frac{1}{p} = 1-\lambda$ ergibt sich für $f = \ln\circ\Gamma$:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Das gilt für alle $x,y>0$ und für alle $\lambda\in(0,1)$, d.h. f ist konvex auf $(0,\infty)$ (gesamter Definitionsbereich!).

<u>Def.</u>: Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ heißt <u>logarithmisch</u> <u>konvex</u>, wenn $\ln\circ\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Mit der Aufgabe haben wir also die logarithmische Konvexität der Γ-Funktion nachgewiesen.

A2 Stetigkeit der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Lös.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \mu[f]$ für

- das Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ und
- die Funktion $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$, $k \mapsto f(k) := \frac{1}{k^s}$.

(a) Stetigkeit in einem Punkt $s_0 > 1$: Sei $(s_n)_n$ eine Folge in $(1,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$. Dann gilt für $f_n(k) = \frac{1}{k^{s_n}}$, dass

(i) $\lim_{n\to\infty} f_n(k) = f_0(k)$ (punktweise Konv.)

(ii) Ist $\varepsilon > 0$, so dass $1 < s_0 - \varepsilon < s_0$ gilt, und

$$F(k) := \frac{1}{k^{s_0-1}},$$

so ist $F \in L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$. Ferner existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$f_n(k) = \frac{1}{k^{s_n}} \leq \frac{1}{k^{s_0-\varepsilon}} = F(k),$$

Wir haben also eine integrierbare Majorante. Jetzt ergibt der Lebesguesche Konvergenzsatz!

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(s_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_n}} \overset{\text{Lebesgue}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^{s_n}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_0}} = \zeta(s_0).$$

(b) Mit derselben Majorante $\left(\frac{1}{k^{s_0-\varepsilon}},\ s_0-\varepsilon>1\right)$ erhalten wir für eine Folge $(s_n)_n$ mit $s_n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \zeta(s_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s_n}} \overset{\text{Lebesgue}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^{s_n}} = 1,$$

denn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^{s_n}} = \begin{cases} 1 & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{"} \ k \geq 2 \end{cases}$.

Bem. In A 40 haben Sie gesehen, dass sogar

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\zeta(s)-1) \text{ konvergiert.}$$

Die Konvergenz $\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1$ ist also immerhin so schnell, dass diese Reihe konvergiert!

(c) Aus der Stetigkeit von ζ auf $[1+\varepsilon, \infty)$ und der Existenz von $\lim_{s\to\infty} \zeta(s)$ folgt die gleichm. Stetigkeit.

(d) Da $\lim_{s\to 1} \zeta(s) = \infty$ (Divergenz der harmonischen Reihe!), ist ζ auf keinem Intervall $(1, 1+\varepsilon)$ mit $\varepsilon>0$ glm. stetig.

A3: $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig d'bar mit $F' = g$. Beh.

$$\mu_F(B) = \int \chi_B(x)\, g(x)\, d\lambda_1(x). \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Bew.: Wir setzen $\nu(B) := \int \chi_B(x)\, g(x)\, d\lambda_1(x)$.

Nach Vor. ist g stetig. Ferner ist F monoton steigend, also $g \geq 0$. Daher ist

$$\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

ein Maß (Folgerung aus dem Satz v. Beppo Levi).

z.z. ist also die Übereinstimmung der Maße μ_F und ν auf $\mathcal{B}$. Dazu reicht es, zu zeigen, dass

$$\mu_F([a,b)) = \nu([a,b))$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, denn $\mathcal{B} = \sigma(\{[a,b), a,b \in \mathbb{R}, a<b\})$.

Das ist mit dem Hauptsatz aber eine Kleinigkeit:

$$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a) \overset{\downarrow}{=} \int_a^b F'(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b)}(x) \cdot g(x)\, d\lambda_1(x) = \nu([a,b)).$$

Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral, wenn der Integrand R-integrierbar ist.

Anwendung mit $F(x) = \arctan(x)$

$$\Rightarrow g(x) = F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x) \cdot x \, d\mu_F(x) = \int_a^b x \cdot g(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_a^b \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(1+b^2) - \ln(1+a^2) \right).$$