Tutorium am 03.02.21

In der ersten Aufgabe möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf die wichtige Hölderscher Ungleichung

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \, , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \; f \in L^p, g \in L^{p'}$$

lenken, die auf Blatt 11 in der Zusatzaufgabe bereits anzuwenden war.

Aufg. 1: Für die Γ-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \qquad (x > 0)$$

zeige man die Ungleichung

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{p'}\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \, \Gamma(y)^{\frac{1}{p'}} \, ,$$

wobei $x, y > 0$ und $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Zusatzfrage: Welche Eigenschaft der Funktion $\ln \circ \, \Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist damit gezeigt?

(Denken Sie an Ana I! Setzen Sie $\lambda = \frac{1}{p'} \in (0,1)$!)

Hinweis: Diese Aufgabe ist vom Umfang und Schwierigkeitsgrad klausurgeeignet, kommt aber natürlich nicht mehr "dran". Dasselbe gilt für die folgenden Aufgaben zu verschiedenen Themen:

Aufg. 2: Die Riemannsche Zeta-Funktion ist definiert als

$$\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ζ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{s\to\infty} \zeta(s)$!

(c) Folgern Sie: ζ ist gleichmäßig stetig auf jedem Intervall $[1+\varepsilon, \infty)$ mit $\varepsilon > 0$.

(d) Ist ζ gleichmäßig stetig auf $(1,\infty)$?

Tipp zu (a) und (b): Lebesguescher Konvergenzsatz. Nach welchem Maß wird hier integriert?

Aufg. 3: Es sei $\mu_F : \mathbb{B} \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Stieltjes-Maß mit Verteilungsfunktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist F stetig differenzierbar mit ~~Verteilungen~~ $F' = g$, so gilt $\forall B \in \mathbb{B}$:

$$\mu_F(B) = \int \chi_B(x)\, g(x)\, d\lambda_1(x).$$

Anwendung: Für $F(x) = \arctan(x)$ berechne man

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x)\, x \, d\mu_F(x).$$