Tutorium am 27.01. Zur Faltung von $\mathcal{L}^1$-Funktionen.

Def.: $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$

Wohldef. mit Hilfe der Sätze von Tonelli und Fubini wie der Vorl. (Blatt 11, A 39, 41, 42, 43)

Assoziativgesetz:

$$(f*g)*h(x) \underset{\text{Def.}}{=} \int f*g\,(x-y)\, h(y)\, dy$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \int \left(\int f(x-y-z)\, g(z)\, dz \right) h(y)\, dy$$

Transformation $z' = z + y$ im inneren Integral, die Det. ist $= 1$:

$$\ldots = \int \left(\int f(x-z')\, g(z'-y)\, dz' \right) h(y)\, dy$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int f(x-z') \left(\int g(z'-y)\, h(y)\, dy \right) dz'$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} \int f(x-z')\; g*h(z')\, dz'$$

$$\underset{\text{Def.}}{=} f*(g*h)(x).$$

$\to$ A 39

Kommutativ- und Distributivgesetz mit ähnlichen Rechnungen! (einfacher)

Bsp. Gaussfunktionen

Def.: Eine Funktion $G_{a,\sigma^2}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der Form

$$G_{a,\sigma^2}(x) := (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x-a|^2}{2\sigma^2}}$$

heißt eine normierte Gaussfunktion.

"Normiert" bedeutet: Der Vorfaktor ist gerade so gewählt, dass $\int G_{a,\sigma^2}(x)\,dx = 1$.

Wir berechnen

$$G_{0,1} * G_{0,1}(x) = (2\pi)^{-n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{2}} \cdot e^{-\frac{|y|^2}{2}}\, dy$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|x-y|^2 + |y|^2\right)\right) dy$$

Wir setzen $y = y' + \frac{x}{2} \Rightarrow x - y = \frac{x}{2} - y'$

$$\Rightarrow |x-y|^2 + |y|^2 = \left|\frac{x}{2} - y'\right|^2 + \left|\frac{x}{2} + y'\right|^2 = \frac{|x|^2}{2} + 2|y'|$$

Die Translation $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ y' \mapsto T(y') = y - \frac{x}{2}$

hat die Funktionaldeterminante 1, also

$$G_{0,1} * G_{0,1}(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{-\frac{|x|^2}{4}} \cdot e^{-|y'|^2}\, dy'$$

$$= (2\pi)^{-n} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4}} \cdot \int e^{-|y|^2} dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\, 2^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2\cdot 2}}$$

$$= G_{0,2}(x)$$

3

Allgemeiner gilt

$$G_{0,\sigma^2} * G_{0,\tau^2} = G_{0,\sigma^2+\tau^2} \,, \qquad (*)$$

was man mit ähnlicher Rechnung zeigen kann.

(kompliziert, aber leicht lehrreich!)

Aufg. 1: Verallgemeinere bei (*) zu

$$G_{a,\sigma^2} * G_{b,\tau^2}(x) = G_{a+b,\sigma^2+\tau^2}(x) \qquad (a, b \in \mathbb{R}^n)$$

(einfach!

Aufg. 2: $f(x) := \chi_{(0,\infty)}(x) \cdot e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$ ④

Berechne $f*f,\ f*f*f, \dots, f^{*n} := \underbrace{f * \dots * f}_{n \text{ Faktoren}}$,

Einstieg:

$$f*f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(0,\infty)}(x-y)\, e^{-(x-y)} \cdot \chi_{(0,\infty)}(y) \cdot e^{-y}\, dy$$

$$= \chi_{(0,\infty)}(x) \cdot e^{-x} \cdot \int_0^x dy \;=\; \chi_{(0,\infty)}(x) \cdot x \cdot e^{-x}$$

Berechnen Sie in ähnlicher Weise $f*f*f$, ggf. auch noch f^{*4} und versuchen Sie, eine Regelmäßigkeit zu erkennen. Formulieren Sie eine Vermutung, die Sie dann induktiv beweisen können.